

Les tests paramétriques

Université de Bourgogne, Licence 2 Gestion

November 13, 2024

Introduction

- 👉 Comme pour les intervalles de confiance, le but d'un test est de donner une propriété de toute la population en s'appuyant sur un échantillon.
- 👉 La décision se prend à l'aide d'un calcul déterminant si l'hypothèse de base (H_0) a l'air d'être plausible ou non.

Exemple (Exercice 11)

- 👉 On suppose que la teneur moyenne en cacao des tablettes d'un fabricant est de $\mu_0 = 600$ g/kg.
- 👉 Le fabricant met sur le marché un nouveau modèle de tablettes plus chères, affirmant qu'elles ont une plus grande teneur en cacao.
- 👉 On effectue un contrôle de qualité sur $n = 100$ tablettes fabriquées avec le nouveau procédé. On trouve une moyenne expérimentale $m^e = 631$ g/kg et un écart-type $s^e = 250$ g/kg.
- 👉 Peut-on considérer que les nouvelles tablettes ont une plus grande teneur en cacao que les anciennes?

Autrement dit

- 👉 On dit aussi : *la valeur $m^e = 631$ est-elle significativement supérieure à 600?*
- 👉 C'est-à-dire : compte tenu des caractéristiques de l'échantillon (taille, moyenne et dispersion des valeurs) et d'un risque admissible d'erreur, peut-on dire que la teneur moyenne en cacao de *la population* (infinie) constituée de toutes les tablettes du nouveau modèle est supérieure à 600.

Test d'ajustement d'une moyenne

Le test d'ajustement d'une moyenne permet de répondre à cette question.

Modélisation :

- ☞ Soit X la teneur en cacao d'une nouvelle tablette et $\mu = E(X)$ la teneur moyenne en cacao des nouvelles tablettes.
- ☞ Le paramètre μ est inconnu .
- ☞ D'après le fabricant $\mu > 600$.
- ☞ Notons:
 - ☞ $H_0 : \mu = 600$ (le fabricant a tort, pas d'amélioration)
l'hypothèse nulle
 - ☞ $H_1 : \mu > 600$ (le fabricant a raison) l'hypothèse alternative

- 👉 Les nouvelles tablettes coûtent plus cher. L'expérience doit être convaincante : l'acheteur n'abandonnera H_0 qu'en présence de faits expérimentaux la contredisant catégoriquement.
- 👉 Selon la décision prise, on peut commettre deux types d'erreur
 - 👉 Une erreur de 1ère espèce : si on choisit H_1 alors que H_0 est vraie.
 - 👉 Une erreur de 2ème espèce si on choisit H_0 alors que H_1 est vraie.

Le principe d'un test

- ☞ est de considérer que l'erreur de 1ère espèce est la plus grave.
- ☞ On fixe donc la probabilité de l'erreur de 1ère espèce α maximale qu'on s'autorise (appelé également *niveau du test*).
- ☞ On choisit la plupart du temps $\alpha = 5\%$.
- ☞ Après l'étape 1. de formulation des hypothèses, un test comprend les étapes suivantes :
 - ☞ 2. On choisit la statistique appropriée au problème et on donne sa loi sous H_0 .
 - ☞ 3. On calcule l'ensemble de ses valeurs "peu probables" sous H_0 qui feraient accepter H_1 .
 - ☞ 4. On calcule la valeur de la statistique dans l'échantillon : si c'est une valeur peu probable sous H_0 , on rejette H_0 et on accepte donc H_1 .

- ➡ 2. La question porte sur l'espérance μ . La statistique adaptée est donc ici la moyenne aléatoire $\bar{X}_n$.
- ➡ On a vu dans le chapitre précédent que la statistique
$$T = \sqrt{n-1} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}$$
 suit une loi de Student $\text{St}(99 \text{ ddl})$.
- ➡ Comme $99 > 70$, on utilise la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
- ➡ On estime l'écart type aléatoire S_n par $s^e = 250$ et sous H_0 , $\mu = 600$.
- ➡ Donc sous H_0 , $T = \sqrt{99} \frac{\bar{X}_n - 600}{250} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

3. L'ensemble des valeurs de T "peu probables" sous H_0 qui feraient accepter H_1 sont les valeurs "très" grandes de T .
- C'est-à-dire toutes les valeurs supérieures au seuil t tel que

$$\mathbb{P}(T > t) = 0.05$$

- $t = 1.645$
- Ces valeurs définissent la *zone de rejet de H_0 au niveau 5%* qui est notée

$$ZR_{5\%} = \{ T > 1.645 \}$$

👉 4. Valeur de la statistique dans l'échantillon :

$$T^e = \sqrt{99} \frac{631 - 600}{250} = 1.23$$

👉 Comme $1.23 < 1.645$, T^e n'est pas dans la zone de rejet de H_0 donc on prend la décision de conserver H_0 .

Remarque importante

- 👉 Dans un test, l'erreur dont on maîtrise la probabilité (5% ici) est celle qui consiste à accepter H_1 alors que c'est H_0 qui est vraie.
- 👉 Donc ici, on ne connaît pas la probabilité de l'erreur de notre décision.
- 👉 On peut seulement dire : **avec cet échantillon, on ne peut pas affirmer que le fabricant a raison.**

Remarque sur le choix des hypothèses

Choix de H_0

Selon les cas, on choisit pour H_0

-  L'hypothèse qu'il est le plus grave de rejeter à tort.
-  L'hypothèse dont on a admis jusqu'à présent la validité.
-  H_0 est toujours une hypothèse d'égalité, car il faut pouvoir faire le calcul de la loi de la statistique sous H_0 .

Choix de H_1

-  Une alternative suggérée par une nouvelle théorie ou une expérience récente.
-  Pragmatiquement : H_1 correspond à la question posée dans l'exercice.

Etapes d'un test

- 1 Formulation des hypothèses
- 2 Statistique adaptée et sa loi sous H_0
- 3 Zone de rejet de H_0 pour un niveau α donné
- 4 Prise de décision
- 5 Si demandé : calcul de la p-value .

Définition de la p-value

- ➡ La p-value est la probabilité sous H_0 d'avoir une valeur de la statistique au moins aussi extrême que celle observée.
- ➡ Pour la calculer, on "met la valeur expérimentale au bord de la zone de rejet et on calcule la probabilité de la zone ainsi obtenue"
- ➡ Si on a accepté H_0 au niveau 5%, forcément $p\text{-value} > 5\%$
- ➡ Si on a accepté H_1 au niveau 5%, forcément $p\text{-value} < 5\%$.
- ➡ La p-value apporte une indication sur le bien-fondé d'une décision. Plus elle est loin de 5%, plus la décision est bien-fondée.

Retour sur l'exemple

- 👉 $p\text{-value} = \mathbb{P}(T > 1.23)$ avec $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- 👉 Donc $p\text{-value} = 0.5 - \varphi(1.23) = 10.93\%$
- 👉 La $p\text{-value}$ est assez élevée, cela confirme la conservation de H_0 .

Forme de la zone de rejet de H_0

- ➡ Selon la formulation de H_1 , la zone de rejet de H_0 revêt des formes différentes.
- ➡ $H_1 : \mu > \mu_0 : ZR_\alpha = \{T > t_\alpha\}$ (test unilatéral supérieur).
- ➡ $H_1 : \mu < \mu_0 : ZR_\alpha = \{T < -t_\alpha\}$ (test unilatéral inférieur).
- ➡ $H_1 : \mu \neq \mu_0 : ZR_\alpha = \{T < -t_\alpha\} \text{ ou } \{T > t_\alpha\}$ (test bilatéral)
- ➡ Et donc la p-value se calcule ainsi :
 - ➡ $H_1 : \mu > \mu_0 : \text{p-value} = \mathbb{P}(T > t^e)$
 - ➡ $H_1 : \mu < \mu_0 : \text{p-value} = \mathbb{P}(T < t^e)$ ($t^e < 0$ forcément)
 - ➡ $H_1 : \mu \neq \mu_0 :$
 $\text{p-value} = \mathbb{P}(T < -t^e) + \mathbb{P}(T > t^e) = 2 \times \mathbb{P}(T > t^e)$

Exercice 12

- 👉 Un atelier de fabrication produit des portes dont la hauteur est une variable aléatoire d'espérance $\mu_0 = 2.5$ mètres. Pour vérifier si ses machines sont bien réglées, le nouveau directeur de l'atelier fait mesurer les hauteurs de 100 portes tirées au hasard et observe $m_e = 2.48$ et $s_e = 0.1$.
- 👉 Faire un test bilatéral au niveau 5% pour dire si les machines sont bien réglées.
- 👉 Calculer la p-value.

Correction

👉 **1) Hypothèses** notons X la variable aléatoire donnant la hauteur d'une porte.

👉 Notons $\mu = E(X)$



$H_0 : \mu = 2.5$ (les machines sont bien réglées)

$H_1 : \mu \neq 2.5$ (les machines sont mal réglées)

👉 **2) Statistique et loi sous H_0**

Notons $\overline{X}_{100}$ la moyenne aléatoire des portes dans des échantillons de $n = 100$ portes.

On a : $s_e = 0.1$ donc :

$$T = \sqrt{99} \frac{\overline{X}_{100} - 2.5}{0.1} \sim St(99)$$

👉 3) Zone de rejet de H_0 pour $\alpha = 0.05$

👉 On fait un test bilatéral donc :



$$ZR_{5\%} = \{T < -1.96 \text{ ou } T > 1.96\}$$

👉 4) Décision

$$T^e = \sqrt{99} \frac{2.48 - 2.5}{0.1} = -2$$

👉 Donc T^e est dans la zone de rejet de H_0 .

👉 **Conclusion** avec un risque de 5 % d'erreur, on peut dire que les machines sont mal réglées.

👉 5) **p-value** $T^e = -2$ donc :

$$\text{p-value} = \mathbb{P}(T < -2 \text{ ou } T > 2) = 2 \times \mathbb{P}(T > 2) = 4.5\%$$

👉 La p-value est proche de 5% donc on est proche de la limite de décision.

Ajustement d'une proportion

- 👉 On s'intéresse cette fois à une proportion p inconnue d'individus possédant un caractère fixé dans une population.

$$\begin{aligned} H_0 &: p = p_0 \\ H_1 &: p \neq p_0 \text{ (ou } p > p_0 \text{ ou } p < p_0 \text{)} \end{aligned}$$

- 👉 On utilise la proportion aléatoire P_n d'individus possédant le caractère dans les échantillons de taille n .

👉 Si on dispose d'un échantillon suffisamment grand ($n > 30$), sous H_0

$$P_n \approx \mathcal{N}\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right).$$

👉 On utilise donc la statistique

$$Z = \frac{P_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

Exercice 13

- 👉 Une machine remplit des sachets pour avoir un poids moyen de 50 grammes. Certains sachets ont un poids inférieur à 50g. On pense qu'en moyenne, on a 46% de sachets en sous-poids.
- 👉 On souhaiterait savoir si on ne sous-estime pas le nombre de sachets en sous-poids.
- 👉 On choisit au hasard un échantillon de $n = 400$ sachets et on trouve 48% des sachets en sous-poids. Faire un test unilatéral au niveau 5% pour conclure.
- 👉 Calculer la p-value.

Correction

➡ Soit p la proportion de sachets en sous-poids. On veut tester



$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0.46 && \text{(on ne se trompe pas)} \\ H_1 &: p > 0.46 && \text{(plus de sachets en sous-poids que l'on pense)} \end{aligned}$$

➡ Notons P_{400} la proportion aléatoire de sachets en sous-poids dans des échantillons de taille $n = 400$.

➡ Sous H_0 ,

$$P_{400} \approx \mathcal{N}\left(0.46, \frac{0.46(1 - 0.46)}{400}\right) = \mathcal{N}(0.46, 0.025^2)$$

➡ et

$$Z = \frac{P_{400} - 0.46}{0.025} \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

✎ Considérant H_1 , on a:

$$ZR_{5\%} = \{Z > 1.645\}$$

✎
$$Z^e = \frac{p^e - 0.46}{0.025} = \frac{0.48 - 0.46}{0.025} = 0.8$$

✎ Z^e n'est pas dans la zone de rejet de H_0 donc on accepte H_0 .

✎ **Conclusion** Avec cet échantillon, on ne peut pas dire qu'on sous-estime le nombre de sachets en sous-poids.

✎
$$\text{p-value} = \mathbb{P}(Z > 0.8) = 21.1\%$$

✎ On est loin d'accepter H_1 .

Ajustement d'une variance

- ☞ Soit une population $\mathcal{P}$ et une variable X quantitative sur $\mathcal{P}$ de variance inconnue σ^2 .
- ☞ $H_0 : \sigma = \sigma_0$ contre $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (ou unilatéral)
- ☞ On note V_n la variance aléatoire.
- ☞ Sous H_0 , la statistique $Y = \frac{nV_n}{\sigma_0^2}$ suit une loi du χ^2 à $n - 1$ ddl.
- ☞ La zone de rejet est :
 - ☞ Test bilatéral : $ZR_{5\%} = \{Y < x_1 \text{ ou } Y > x_2\}$ avec x_1 et x_2 tels que $\mathbb{P}(Y < x_1) = 0.025$ et $\mathbb{P}(Y > x_2) = 0.025$.
 - ☞ Test unilatéral inférieur : $ZR_{5\%} = \{Y < x_1\}$ avec x_1 tel que $\mathbb{P}(Y < x_1) = 0.05$.
 - ☞ Test unilatéral supérieur : $ZR_{5\%} = \{Y > x_2\}$ avec x_2 tel que $\mathbb{P}(Y > x_2) = 0.05$.

Exercice 14



Un client a remarqué que la durée de vie de ses ordinateurs a souvent une grande dispersion ($\sigma_0 = 5$ mois). Cela ne lui convient pas car il veut pouvoir renouveler son parc informatique en une seule fois. Un nouveau fournisseur affirme que l'écart-type de la durée de vie de ses nouvelles machines est réduit. Pour tester son information, nous observons 24 machines et mesurons un écart-type de $s^e = 2.5$ mois.



Question: est-ce que la durée de vie des nouvelles machines a une dispersion plus faible que les anciennes (au niveau 5%)?

Correction



Notons σ l'écart-type de la durée de vie des nouvelles machines



$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma = 5 && \text{(même dispersion)} \\ H_1 &: \sigma < 5 && \text{(dispersion plus faible que les anciennes)} \end{aligned}$$



Notons V_{24} la variance aléatoire des durées vie d'un échantillon de 24 nouveaux ordinateurs.



Posons

$$Y = \frac{24 \times V_{24}}{5^2}$$

Sous H_0 , Y suit une loi du χ^2 à 23 ddl.



Considérant H_1 ,

$$ZR_{5\%} = \{Y < 13.091\}$$



$$Y^e = \frac{24 \times 2.5^2}{5^2} = 6$$



Y^e est dans la zone de rejet de H_0 donc on accepte H_1



Conclusion on peut dire avec un risque d'erreur de 5% que la durée de vie des nouvelles machine a une dispersion plus faible.

Si on veut comparer deux populations, il faut utiliser un test **de comparaison**.

Comparaison de 2 moyennes

- ➡ Il y a **deux** populations $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et **deux** échantillons de taille n_1 et n_2 extraits.
- ➡ On note μ_1, μ_2 les moyennes (inconnues) de la variable étudiée X sur $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
- ➡ On veut tester $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre
 - ◆ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (test bilatéral)
 - ◆ ou $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (test unilatéral)
- ➡ On note $\overline{X_{n_1}}, \overline{X_{n_2}}$ les moyennes aléatoires.

👉 La statistique à utiliser est

$$T = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{X}_{n_2}}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}.$$

où S est estimé par $s = \sqrt{\frac{n_1 v_1^e + n_2 v_2^e}{n_1 + n_2 - 2}}$.

👉 Résultat : Sous H_0 , T suit une loi de Student à $n_1 + n_2 - 2$ ddl

Exercice 15

- 👉 Un fabricant de câbles en acier étudie un nouveau traitement de câbles pour améliorer leur résistance. Il choisit au hasard $n_1 = 200$ câbles traités et $n_2 = 100$ câbles non traités. On note X la charge de rupture d'un câble.
- 👉 Pour les câbles traités, il observe $m_1 = 30,82$ $v_1^e = 27,25$ et pour les non-traités, $m_2 = 29,63$ $v_2^e = 23,99$.
- 👉 Peut-on conclure à l'efficacité du traitement (au niveau 5%) ?

Correction



Notons

- $\mathcal{P}_1$ la population des câbles traités
- $\mathcal{P}_2$ la population des câbles non traités
- μ_1 la charge de rupture moyenne dans $\mathcal{P}_1$ et μ_2 dans $\mathcal{P}_2$



$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$



Notons $\overline{X}_{n_1}$ (resp. $\overline{X}_{n_2}$) la charge de rupture moyenne aléatoire des échantillons de taille n_1 (resp. n_2) issu de $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$).



Posons $T = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{X}_{n_2}}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ où $s = \sqrt{\frac{n_1 v_1^e + n_2 v_2^e}{n_1 + n_2 - 2}} = 5.132$

- 👉 Sous H_0 , T suit une loi du $St(298ddl) \approx \mathcal{N}(0, 1)$
- 👉 on accepte H_1 si T est une "grande" valeur positive donc

$$ZR_{5\%} = \{T > 1.645\}$$



$$T^e = \frac{30.82 - 29.63}{s \times \sqrt{\frac{1}{200} + \frac{1}{100}}} = 1.89$$

- 👉 T^e est dans la zone de rejet de H_0 donc on accepte H_1
- 👉 **Conclusion** on peut dire avec un risque d'erreur de 5% que le traitement est efficace.

Comparaison de 2 proportions

- ➡ On souhaite tester : $H_0 : p_1 = p_2$ contre $H_1 : p_1 \neq p_2$.
- ➡ Notons P_{n_1}, P_{n_2} les proportions aléatoires correspondantes.
- ➡ Résultat : *sous* H_0

$$P_{n_1} - P_{n_2} \approx \mathcal{N}\left(0, p_0(1 - p_0)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

avec $p_0 = \frac{n_1 p_1^e + n_2 p_2^e}{n_1 + n_2}$

- ➡ On fait le test sur la variable centrée réduite Z associée.

Exercice 17

- 👉 A la sortie de deux salles de cinéma donnant le même film, on a interrogé des spectateurs quant à leur opinion sur le film. Les résultats de ce sondage d'opinion sont les suivants :

Opinion	Mauvais film	Bon film	Total
Salle 1	30	70	100
Salle 2	48	52	100
Total	78	122	200

- 👉 Peut-on dire que la proportion de personnes appréciant le film comme "bon" est différente entre les deux salles?



Notons

- p_1 proportion de personnes trouvant le film bon dans la salle 1.
- p_2 ————— salle 2.



$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$



Notons P_{n_1}, P_{n_2} les proportions aléatoires correspondantes.



Sous H_0 , $P_{n_1} - P_{n_2}$ suit une loi $\mathcal{N}\left(0, p_0(1 - p_0)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$

avec $p_0 = \frac{n_1 p_1^e + n_2 p_2^e}{n_1 + n_2} = 0.61$.



Donc $P_{n_1} - P_{n_2} \sim \mathcal{N}\left(0, 0.069^2\right)$.

👉 Donc sous H_0 , $Z = \frac{P_{n_1} - P_{n_2}}{0.069} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

👉 $ZR_{5\%} = \{Z < -1.96 \text{ ou } Z > 1.96\}$

👉 $Z^e = \frac{0.7 - 0.52}{0.069} = 2.61$. On accepte H_1 .

👉 **Conclusion** Avec un risque d'erreur de 5%, on peut dire que la salle influence l'opinion des gens.