TD1

Exercice 1.1

Pour chacun des ensembles suivants, contenus dans un espace $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3), déterminer s'il forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si oui, déterminer une famille génératrice de F.

- $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ 2x_1 + x_2 = 0\}$,
- $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ 2x_1 + x_2 = 1\}$,
- $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 = x_2^2\}$,
- $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 < 1\}$,
- $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$,
- $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1\, x_2\, x_3 = 0\}$,
- $F = \{\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(0, 1, -1),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 1.2

On considère l'ensemble $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$.

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
- Mettre le sous-espace F sous la forme $F = \mathrm{Vect}\{u, v\}$, où u et v sont deux vecteurs que l'on explicitera.

Exercice 1.3

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Si ce n'est pas le cas, donner une relation qui lie ces vecteurs.

- $u_1 = (-1, 2)$ et $u_2 = (4, 1)$,
- $u_1 = (-1, 2)$, $u_2 = (4, 1)$ et $u_3 = (1, 1)$,
- $v_1 = (1, 2, -2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (0, 0, 3)$,
- $v_1 = (1, 2, -2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 3)$ et $v_4 = (1, 1, 1)$.

Exercice 1.4

Les familles de vecteurs ci-dessous sont constituées de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$, 3 ou 4). Déterminer les familles qui sont libres, celles qui sont génératrices et celles qui forment une base de $\mathbb{R}^n$. On précisera le rang de chaque famille.

- $S_1 = \{(1, 2), (-2, 3)\}$
- $S_2 = \{(1, 2), (-2, 3), (-1, 5)\}$
- $S_3 = \{(1, 2, 6), (0, 7, 13), (0, 0, 4), (1, 2, 10)\}$
- $S_4 = \{(1, 2, 6, 0), (0, 7, 13, -1), (0, 0, 4, -3), (1, 2, 10, -3)\}$
- $S_5 = \{(1, 2, 6, 0), (-2, 3, 1, -1), (3, -2, 4, -4), (0, 1, -1, 5)\}$
- $S_6 = \{(1, 2, 6, 0), (-2, 3, 1, -1), (3, -2, 4, -4), (0, 1, -1, 5), (0, 0, 0, 1)\}$.

Exercice 1.5

- Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$. Échelonner la famille $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ relativement à la base canonique et en déduire son rang. Forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
- Donner la définition des sous-espaces suivants, puis déterminer la (ou les) équation(s) qui les caractérise(nt): $\mathrm{Vect}\{u_1\}$, $\mathrm{Vect}\{u_1, u_3\}$.

Exercice 1.6

On considère dans $\mathbb{R}^4$ la famille $S = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$, où $v_1 = (1, -2, 0, 3)$, $v_2 = (2, 3, 0, -1)$, $v_3 = (2, -1, 2, 1)$ et $v_4 = (3, 9, -4, -2)$. Échelonner la famille S relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En déduire le rang de S et, s'il y a lieu, expliciter la ou les relation(s) linéaire(s) qui lie(nt) les vecteurs de S.

Exercice 1.7
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (-1,1,1)$, $u_3 = (0,2,1)$, $v_1 = (2,-1,0)$, $v_2 = (1,2,-5)$ et $v_3 = (3,1,-1)$.

. Vérifier que $\beta_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ et $\beta_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.

. Quelles sont les coordonnées du vecteur $u = (1,-1,1)$ dans ces deux bases ?

Exercice 1.8
On considère les vecteurs $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (-1,0,1,0)$, $u_3 = (5,3,1,3)$, $u_4 = (0,1,2,1)$ de $\mathbb{R}^4$ et le sous-espace vectoriel F engendré par u_1 et u_2.

. Vérifier que $\beta = \{u_1, u_2\}$ est une base de F.

. Vérifier que les vecteurs u_3 et u_4 appartiennent à F et déterminer leurs coordonnées dans la base β.

. Montrer que F coïncide avec le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_3, u_4\}$.

. Compléter β pour former une base de $\mathbb{R}^4$. Expliciter les composantes de u_4 dans cette base.

TD2

Exercice 2.1
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

. Calculer, si cela a un sens, les produits AB, BA et $A^T C$.

. Calculer les produits $B^T B$ et BB^T, puis énoncer quelques propriétés des matrices obtenues.

. Déterminer le rang des matrices A, B, B^T et C, puis la dimension de leur noyau.

Exercice 2.2

. On suppose que A et B sont des matrices carrées d'ordre n, inversibles. Simplifier l'expression $C = A[I + (BA)^{-1}B]$.

. On suppose que A est une matrice de taille $m \times n$ et que B est une matrice de taille $p \times q$. Sous quelles conditions, l'expression $C = (A^T + B^T B)^T$ a-t-elle un sens ? Donner alors la taille de C et simplifier l'expression.

Exercice 2.3
On considère la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

. Montrer que M est inversible, expliciter la matrice $N = M - I$ et calculer N^2 et N^3.

. Justifier la relation $N^3 = (M - I)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I$.

. Utiliser ce qui précède pour montrer que $M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$.

. Justifier la relation $M^2 = (N + I)^2 = N^2 + 2N + I$, et en déduire que $M^{-1} = N^2 - N + I$.

. Expliciter M^{-1}.

Exercice 2.4

. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0\}$, déterminer une matrice A telle que $E = \ker A$ et en déduire la dimension de E.

. Même question pour $F = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0,\ x_2 + 7x_3 = 0\}$.

Exercice 2.5
On considère une matrice A d'ordre $p \times n$.
Montrer la relation $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

Exercice 2.6
On considère une matrice A d'ordre $p \times n$. Quelle opération matricielle faut-il faire pour récupérer la 3ème colonne de A ? la 2ème ligne de A ? la somme des coefficients qui se trouvent sur une ligne de A ? la somme des coefficients qui se trouvent sur une colonne de A ? la somme de tous les coefficients de la matrice (lorsque $p = n$) ?

Exercice 2.7
Soit A une matrice à p lignes et n colonnes. On suppose $p > n$.

- Montrer que $A^T A$ est symétrique et semi-définie positive.

- Montrer que $A^T A$ est définie positive si et seulement si A est de rang maximal.

Exercice 2.8
On considère le système linéaire de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Expliciter la matrice A du système ainsi que le second membre b. Donner le rang de la matrice A et la dimension de son noyau. Résoudre le système linéaire (on pourra utiliser la méthode du pivot de Gauss).

Exercice 2.9

On considère le système linéaire de 3 équations à 5 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & - & 8x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 1. \end{array}\right.$$

. Expliciter la matrice A du système, donner son rang et la dimension de son noyau.

. Les vecteurs $u_1 = (12, -2, -2, 2, 0)$, $u_2 = (-2, 2, 0, 1, 1)$ et $u_3 = (-10, 5, 1, 1, 2)$ appartiennent-ils au noyau de A ?

. Utiliser ce qui précède pour déterminer une base du noyau de A.

. Le vecteur $x = (-6, 2, 1, -1, -1)$ est-il solution du système linéaire ?

. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions du système.

Exercice 2.10

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Calculer l'inverse de cette matrice en résolvant le système linéaire $Ax = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.

Mêmes questions avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

TD3

Exercice 3.1

Calculer les déterminants

$$\Delta_1 := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

. par la règle de Sarrus,
. par développement suivant la première colonne,
. par développement suivant la première ligne,
. par développement suivant la seconde ligne,
. en faisant apparaître des zéros dans les lignes (ou les colonnes).

Exercice 3.2

Calculer le déterminant

$$\Delta := \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3.3

On considère dans $\mathbb{R}^4$ la famille $S := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ constituée des quatre vecteurs $v_1 := (1, -2, 0, 3)$, $v_2 := (2, 3, 0, -1)$, $v_3 := (2, -1, 2, 1)$ et $v_4 := (3, 9, -4, -2)$. Expliciter le déterminant de S et en déduire si S est libre ou liée.

Exercice 3.4

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer la comatrice de A, puis l'inverse de A.

Mêmes questions avec la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

TD4

Exercice 4.1
On considère les matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Expliciter les valeurs propres de ces matrices. Déterminer les sous-espaces propres associés.

Exercice 4.2
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Expliciter les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés. Donner la dimension et une base de chaque sous-espace propre.

Exercice 4.3
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expliciter le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés. Vérifier que les sous-espaces propres sont orthogonaux.

Exercice 4.4
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

. Sans calculer le polynôme caractéristique, déterminer si $\lambda = 3$ et $\mu = 1$ sont des valeurs propres de la matrice A. Si oui, déterminer le sous-espace propre associé.
. Expliciter le polynôme caractéristique et confirmer les résultats précédents.
. Calculer $B = A^2$. Déterminer si $x = (1, 1, 1)$ et $y = (0, 1, -2)$ sont vecteurs propres de B. Si oui à quelle valeur propre sont-ils associés ?

Exercice 4.5
Montrer sans calcul que $\lambda = -3$ et $\mu = 1$ sont valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

TD5

Matrices positives, matrices productives et matrices stochastiques

Exercice 5.1

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$ est productive.
2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.
   On raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe $q = (q_1, q_2, q_3) \geq 0$ tel que $Bq < q$.

Exercice 5.2
Soit A une matrice positive ($A \geq 0$) telle que $(I - A)$ soit inversible et d'inverse positive (c'est-à-dire $(I - A)^{-1} \geq 0$). Montrer que A est productive.

Exercice 5.3
Soit A une matrice carrée positive telle que $2A^3 = A^2$.

1. Calculer $(I - A)(I + A + 2A^2)$.
2. Justifier le fait que la matrice $I + A + 2A^2$ est positive.
3. En déduire que la matrice A est productive.

Exercice 5.4
Soit A une matrice productive d'ordre n, λ une valeur propre (réelle), x un vecteur propre associé, $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ un vecteur positif (tous les d_i strictement positifs) et k un indice tel que

$$\forall j = 1, 2, \dots, n : \quad \frac{|x_j|}{d_j} \leq \frac{|x_k|}{d_k}.$$

1. Montrer que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ on a

$$\lambda\, x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \text{et} \quad |\lambda||x_i| \leq \frac{|x_k|}{d_k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j$$

(penser à multiplier et diviser les termes de la première somme par d_j)

2. En prenant un vecteur d bien choisi (on rappelle que A est productive) et un indice i bien choisi dans l'inégalité ci-dessus, en déduire que $|\lambda| < 1$.

Exercice 5.5
Soit A un matrice stochastique d'ordre n, λ une valeur propre réelle, x un vecteur propre associé et k un indice tel que $|x_j| \leq |x_k|$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$.

1. Montrer que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ on a $|\lambda||x_i| \leq |x_k| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ et $|\lambda - a_{ii}|\, |x_i| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}$.
2. En appliquant la première des inégalités ci-dessus pour un indice i bien choisi, montrer que $|\lambda| \leq 1$.
3. En appliquant la seconde des inégalités ci-dessus pour un indice i bien choisi, montrer, si on suppose que les termes diagonaux de A sont tous strictement positifs, que $\lambda \neq -1$.