Université de Bourgogne Année 2024-2025
L2 Gestion - Exercices de Statistiques

Chap1 : Lois de probabilités

<u>Exercice</u> 1 : On admet que la probabilité qu'un téléphone portable soit en bon état de fonctionnement au bout de 5 ans est 0.7. Un vendeur vend le même jour 6 téléphones. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de téléphones (parmi ces 6) en bon état de fonctionnement au bout de 5 ans.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer les probabilités qu'au bout de 5 ans :
   a) 4 téléphones exactement soient en bon état.
   b) Tous les téléphones soient en bon état.
   c) Au moins un téléphone soit en panne.

<u>Exercice</u> 2 :
1. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 1. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 3)$ et $\mathbb{P}(X \geq 1)$.
2. Une compagnie d'assurance assure pour une année un parc de 200 véhicules contre un sinistre qui a la probabilité 0.5% de survenir sur un véhicule. La prime d'assurance par véhicule est de 30 euros. La compagnie verse 2000 euros au parc par sinistre.
   a) Soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de sinistres en 1 an pour un parc de 200 véhicules. Quelle est la loi de Y ? Donner $E(Y)$.
   b) On admet que la loi de Y peut être approximée par une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Calculer la probabilité que la compagnie réalise un bénéfice cette année.

<u>Exercice</u> 3 : Une entreprise souhaite comprendre le comportement des utilisateurs de leur site web. Ils ont déterminé que le temps X que passe un utilisateur sur leur site (en minutes) suit une loi exponentielle de paramètre λ et que le temps moyen est de 5 minutes.

1. Quelle est la valeur du paramètre λ de la loi exponentielle ?
2. Quelle est la probabilité qu'un utilisateur passe plus de 10 minutes sur le site ?
3. Quelle est la probabilité qu'un utilisateur passe entre 3 et 7 minutes sur le site ?
4. Calculer le temps *médian* passé sur le site, c'est-à-dire le nombre de minutes t_0 tel que 50% des utilisateur passent moins de t_0 minutes sur le site (et donc également 50% des utilisateur passent plus t_0 minutes sur le site). On arrondira à la seconde près.
5. On considère qu'un utilisateur passant plus de 10 minutes sur le site est un utilisateur "engagé". On note X la v.a. donnant le nombre d'utilisateurs engagés parmi 20 utilisateurs. Donner la loi de X.
6. Calculer la probabilité que parmi 20 utilisateurs, il y en ait 2 ou moins qui soient engagés.
7. Donner le nombre moyen d'utilisateurs engagés parmi 20 utilisateurs.

<u>Exercice</u> 4 : Soit Z une v.a. qui suit une loi normale centrée et réduite.

1. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(Z \leq 2)$, $\mathbb{P}(Z \geq 2.3)$, $\mathbb{P}(Z \geq -2.3)$, $\mathbb{P}(Z \geq -1.5), \mathbb{P}(1.4 \leq Z \leq 2.8)$,$\mathbb{P}(-1.2 \leq Z \leq 2.2)$,$\mathbb{P}(Z \leq -1.5$ ou $Z \geq 1.5)$.
2. Trouver le nombre z tel que : $\mathbb{P}(Z \leq z) = 0.01$, puis $\mathbb{P}(Z \geq z) = 0.01$ puis $\mathbb{P}(Z \leq -z$ ou $Z \geq z) = 0.01$

Exercice 5 : On suppose que X suit une loi normale de moyenne $m = 25$ et d'écart type $\sigma = 5$.

1. Calculer les probabilités : $\mathbb{P}(X \geq 30)$, $\mathbb{P}(X \leq 15)$, $\mathbb{P}(18 \leq X \leq 32)$.
2. Déterminer la valeur de a telle que : $\mathbb{P}(X \leq a) = 0.95$.
3. Donner les bornes d'un intervalle centré en m qui contient 99.5% des observations.
4. On suppose maintenant que m et σ sont quelconques. Calculer : $\mathbb{P}(m - k\sigma \leq X \leq m + k\sigma)$ pour $k = 1, 2, 3$ et 4.

Exercice 6 : Une entreprise dispose d'un parc de 18 serveurs. La probabilité de panne d'un serveur au cours d'une journée est 0.1. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de pannes au cours d'une journée.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 3 pannes au cours d'une journée ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus deux pannes au cours d'une journée ?
4. Une grande entreprise dispose d'un parc de 160 serveurs du même type que précedemment qui doivent fonctionner en permanence.
   a) On peut approcher la loi de X par une loi normale, laquelle ?
   b) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \geq 16)$.
   c) L'entreprise décide d'acheter quelques serveurs de réserve en cas de panne. Combien de serveurs doit-elle prévoir si elle veut qu'il y ait un risque maximum de 0.5% que le parc ne fonctionne pas dans son intégralité.

Exercice 7 : Vous vendez de l'électricité et vous disposez d'un parc de 120 groupes électrogènes qui assurent la totalité de votre production. La probabilité pour qu'un groupe électrogène subisse une avarie un jour donné est de 8%. Il faut alors mettre en marche un groupe de secours pour assurer le service pour sa clientèle. Il vous faut donc des groupes de réserve. On désigne par X le nombre éventuel de pannes parmi les 120 groupes un jour donné.

1. Préciser la loi de X.
2. Justifier que la variable X est proche d'une loi normale. Préciser cette loi normale.
3. Calculer la probabilité pour que X soit supérieur ou égal à 15.
4. Quel est le nombre a de groupes de réserve que vous devriez prévoir pour que le risque de non remplacement de groupes en panne soit inférieur à 5%.

Chap2 : Estimation et intervalles de confiance

Exercice 8 : Pour le second tour d'une élection législative où deux candidats sont en lice, l'un des deux candidats a fait effectuer un sondage sur $n = 100$ votants. Cet échantillon lui donne 55% d'intentions de votes favorables.

1. Donner un intervalle de confiance de la proportion de votants pour ce candidat au niveau de confiance 99% et l'interpréter.
2. Que devient cet intervalle de confiance (à 99%) si le sondage est effectué sur $n = 1500$ votants (et recueille à nouveau 55% d'intentions de votes favorables) ? Que remarquez-vous ?
3. Quelle taille minimale d'échantillon faut-il pour avoir une précision inférieure à 2% avec un niveau de confiance à 95% ?

Exercice 9 : On souhaite estimer la proportion p d'adultes illettrés parmi les personnes inscrites à Pôle Emploi dans une certaine agence qui suit 1000 chômeurs. On fait passer un test de lecture à 200 personnes. Parmi eux, 30 sont illettrés.

1. Donner une estimation ponctuelle de p.
2. Donner un intervalle de confiance à 95 % de p le plus précis possible et l'interpréter.
3. Etant donné qu'il y a 7% d'illétrés dans la population générale, peut-on dire qu'il y a une proportion plus grande d'illétrés dans cette agence ?

Exercice 10 : Une entreprise souhaite évaluer les ventes mensuelles moyennes d'un nouveau produit (en milliers d'unités). Ils ont collecté les données pendant 12 mois et ont obtenu une moyenne de 25 et un écart type de 4.5. On supposera que le nombre de ventes mensuelles suit une loi normale.

1. Calculez un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne des ventes mensuelles et l'interpréter.
2. Combien de mois de données doivent être collectés pour estimer la moyenne des ventes mensuelles avec une précision de 1 millier d'unités à un niveau de confiance de 95% (on prendra le quantile de la loi normale) ?

Exercice 11 : Une entreprise souhaite évaluer la satisfaction de ses clients après avoir lancé une nouvelle campagne publicitaire. Elle a collecté les données de satisfaction auprès de 57 clients, en utilisant une échelle de satisfaction de 1 à 10. On supposera que les données suivent une loi normale :

Satisfaction	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de clients	4	6	10	14	12	8	3

1. Construisez un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne des scores de satisfaction et interprétez-le.
2. Construisez un intervalle de confiance à 95% pour l'écart-type des scores de satisfaction et interprétez-le.
3. Déterminez la taille de l'échantillon nécessaire pour obtenir un intervalle de confiance à 95% pour la moyenne des scores de satisfaction avec une marge d'erreur maximale de 0.2.

Chap3 : Tests paramétriques

Exercice 12 : Une entreprise fait passer un questionnaire de satisfaction à un échantillon de 27 clients. La satisfaction moyenne est de 6.7 avec un écart-type de 1.2. On suppose que la satisfaction des clients suit une loi normale.

1. Peut-on conclure que la satisfaction moyenne des clients est supérieure à 6 au niveau de signification de 5% ? Réalisez un test unilatéral.
2. Peut-on conclure que la satisfaction moyenne des clients est inférieure à 7 au niveau de signification de 5% ? Réalisez un test unilatéral.
3. En approximant la loi de Student par une loi $\mathcal{N}(0;1)$, calculer la p-value de chacun des tests précédents.

Exercice 13 : Une banque estime que 70 % de ses clients devraient utiliser les services en ligne. Pour vérifier cette hypothèse, elle effectue un sondage auprès de 500 clients et trouve que 340 d'entre eux utilisent les services en ligne. Faire un test unilatéral au niveau 0.05 pour savoir si le pourcentage d'utilisation est inférieur à 70%. Calculer la p-value du test.

Exercice 14 : Un expert en organisation affirme que l'introduction d'une nouvelle installation permet de réduire le temps de production de 8% en moyenne avec un écart type de l'ordre de 0.25%. Un échantillon de 16 employés travaillant avec la nouvelle installation a donné une réduction du temps de production de 7.8% en moyenne avec un écart type de 0.5%.

En admettant que la réduction du temps de production est régi par une loi normale, faire des tests unilatéraux au niveau $\alpha = 0.05$ pour décider si les affirmations de l'expert (concernant la réduction moyenne du temps de production et l'écart type : 2 tests) sont exactes.

Exercice 15 : Une entreprise souhaite lancer un nouveau produit et a mené une étude de marché pour évaluer la perception des consommateurs dans deux régions différentes : la région A et la région B. L'entreprise a posé la même question aux consommateurs des deux régions : "Aimeriez-vous acheter ce nouveau produit ?"

Les résultats de l'enquête sont les suivants :

Dans la région A, 120 personnes sur 200 ont répondu "oui". Dans la région B, 170 personnes sur 250 ont répondu "oui".

Faire un test bilatéral pour déterminer s'il existe une différence significative entre les proportions de consommateurs des deux régions qui souhaitent acheter le nouveau produit.

Exercice 16 : Dans une entreprise le nombre moyen de jours d'absence pendant un trimestre a été de 2.05 pour 70 employés, avec une variance de 3.05. Dans une autre entreprise le nombre de jours d'absence pendant le même trimestre a été de 3.01 pour 53 employés, avec une variance de 2.14. Peut-on considérer que le taux d'absentéisme moyen pour maladie est identique dans les deux entreprises ?

Exercice 17 : On souhaite étudier si la confiance des clients en une entreprise X est dépendante du genre. On utilise l'échelle de Lickert sur un échantillon de 100 personnes. La question qui nous intéresse est : *si j'avais une opinion personnelle à émettre à propos de l'entreprise X, je dirais que c'est une entreprise en qui j'ai confiance.* Voici les effectifs obtenus :

	Pas du tout d'accord	Plutôt pas d'accord	Sans opinion	Plutôt d'accord	Tout à fait d'accord
Femme	5	8	17	10	13
Homme	3	5	10	13	16

Faire un test d'indépendance du χ^2 au niveau 0.05 pour répondre à la question.

Exercice 18 : Le nombre de pièces défectueuses fabriquées en une journée dans un atelier ventilé est donné dans le tableau suivant (tous les postes produisent le même nombre de pièce par jour).

numéro du poste	1	2	3	4	5
nombre de pièces défectueuses	22	26	16	23	13

Peut-on dire que ces résultats traduisent une différence dans la qualité du travail ?

Exemples traités en cours

Chap1 : Loi binomiale

Exercice 1 : Une entreprise de commerce électronique observe que 5% des commandes sont annulées par les clients. On prélève un échantillon de 10 commandes pour une analyse de performance.

1. Déterminer le nombre moyen de commandes annulées dans un échantillon de 10 commandes..
2. Calculez la probabilité de trouver au maximum 2 commandes annulées dans cet échantillon de 10 commandes.
3. Calculez la probabilité de trouver au minimum 2 commandes annulées dans cet échantillon de 10 commandes.

Remarque : La taille de la "population de commandes" étant grande (voire infinie), on suppose implicitement que le pourcentage d'annulations reste constant à 5 % pendant le tirage de l'échantillon.

Chap1 : Loi géométrique

Exercice 2 : On joue à un jeu dans lequel on lance un dé plusieurs fois de suite et on s'arrête dès que l'on obtient un 6. Quelle est la probabilité que l'on s'arrête au bout de 5 lancers ?

Chap1 : Loi de Poisson

Exercice 3 : Notons X le nombre d'accidents subis par le personnel d'une usine dans une journée de travail. On suppose que X suit une loi de Poisson. On sait que le nombre d'accidents moyen par jour dans ce type d'usine est 0.8.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait un accident au cours d'une journée, puis au moins deux accidents.
2. Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre d'accidents sur une semaine (5 jours). Donner la loi de Y.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins 3 accidents sur une semaine.

Chap1 : Loi exponentielle

Exercice 4 : Soit T donnant la durée de vie (en jours) d'un certain type de composant électronique. Supposons que $T \sim \mathcal{E}(0.0002)$.

1. Donner la densité et la fonction de répartition de T.
2. Déterminer la probabilité pour qu'un composant pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 2 000 jours.
3. Déterminer la durée de vie moyenne des composants.
4. Déterminer la valeur t_0 pour laquelle $\mathbb{P}(T < t_0) = 0.5$ (appelée demi-vie d'un composant).

Chap1 : Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Exercice 5 : Dans une entreprise, chaque personne téléphone en moyenne 10 minutes par heure à l'extérieur. Il y a 300 employés et un standard qui filtre les appels vers l'extérieur. L'entreprise souhaite s'abonner à un nombre limité de lignes extérieures. Quel est le nombre minimal de lignes qu'elle doit prévoir pour que le risque d'encombrement soit inférieur à 5% ?

Chap1 : Somme de lois normales indépendantes

Exercice 6 : Vous êtes responsable de la sécurité de votre entreprise. Vous avez commandé un ascenseur sur lequel est inscrit : CHARGE MAX=800kg. En relevant le poids de votre personnel, vous avez constaté que le poids moyen est de 70kg avec un écart type de 6kg. En supposant que le poids d'une personne suit une loi normale, calculer le risque de surcharge si 12 personnes montent en même temps ?

Chap2 : Echantillonnage

Exercice 7 : Dans le cadre du lancement d'un nouveau produit, une entreprise a mené une enquête de satisfaction client. La satisfaction est mesurée sur une échelle de 1 à 100. Les études préliminaires montrent que la satisfaction moyenne attendue est de 75, avec un écart-type de 10. Sachant cela, est-il possible d'observer une moyenne de satisfaction inférieure à 73 sur un échantillon de 80 clients ?

Chap2 : Intervalle de confiance d'une moyenne et d'un écart-type

Exercice 8 : On a relevé le nombre d'heures (x) travaillées par mois pour un échantillon de 100 employés d'un certain type d'usine dans le but d'estimer le nombre moyen d'heures travaillées dans la population des employés de ce type d'usine.

x	[141 ;143[	[143 ;145[	[145 ;147[	[147 ;149[	[149 ;151[
eff.	1	5	6	21	32
x	[151 ;153[	[153 ;155[	[155 ;157[	[157 ;159[	[159 ;161[
eff.	22	7	4	2	0

1. Donner une estimation et un intervalle de confiance à 95 % du nombre moyen μ d'heures travaillées dans la population des employés.
2. Quelle est la taille minimale de l'échantillon que l'on doit choisir pour pouvoir estimer μ à $0,3$ heures près (notation décimale) avec une confiance de $0,98$?
3. Donner un intervalle de confiance à 95 % pour l'écart-type du nombre d'heures travaillées dans ce type d'usines.

Chap2 : Intervalle de confiance d'une proportion

Exercice 9 : Dans une entreprise de matériel informatique, on veut estimer la proportion p d'ordinateurs dont la durée de vie est inférieure à 4 ans. On a relevé un échantillon de 240 ordinateurs livrés à des clients depuis 4 ans. On a constaté qu'il y en a 96 en fin de vie. Donner une estimation de p à l'aide d'un intervalle de confiance à 90 %. Quelle taille minimale d'échantillon faudrait-il avoir pour estimer cette proportion à 0.03 près avec un intervalle de confiance à 90 % ?

Exercice 10 : On s'intéresse à l'estimation de la proportion p d'individus atteints par une maladie professionnelle dans une entreprise de 1500 salariés. On sait par ailleurs que trois personnes sur dix sont ordinairement touchées par cette maladie dans des entreprises du même type. Quelle taille d'échantillon faut-il sélectionner pour avoir une estimation à 0.03 près avec une confiance à 95% d'abord sans tenir compte de l'information sur la taille de l'entreprise puis en en tenant compte.

Chap3 : Exemple pour l'introduction aux tests

Exercice 11 : On suppose que la teneur moyenne en cacao des tablettes d'un fabricant de chocolat est de $\mu_0 = 600$ g/kg. Le fabricant met sur le marché un nouveau modèle de tablettes plus chères, affirmant qu'elles ont une plus grande teneur en cacao. On effectue un contrôle de qualité sur $n = 100$ tablettes fabriquées avec le nouveau procédé. On trouve une moyenne expérimentale $m^e = 631$ g/kg et un écart-type $s^e = 250$ g/kg.

Peut-on considérer que les nouvelles tablettes ont une plus grande teneur en cacao que les anciennes ?

Chap3 : Test d'ajustement d'une moyenne

Exercice 12 : Un atelier de fabrication produit des portes dont la hauteur est une variable aléatoire d'espérance $\mu_0 = 2,5$ mètres. Pour vérifier si ses machines sont bien réglées, le nouveau directeur de l'atelier fait mesurer les hauteurs de 100 portes tirées au hasard et observe $m_e = 2,48$ et $s_e = 0,1$. Faire un test bilatéral au niveau 5% pour dire si les machines sont bien réglées. Calculer la p-value.

Chap3 : Test d'ajustement d'une proportion

Exercice 13 : Une machine remplit des sachets pour avoir un poids moyen de 50 grammes. Certains sachets ont un poids inférieur à 50g. On pense qu'en moyenne, on a 46% de sachets en sous-poids. On souhaiterait savoir si on ne sous-estime pas le nombre de sachets en sous-poids. Pour cela, on choisit au hasard un échantillon de $n = 400$ sachets et on trouve 48% des sachets en sous-poids. Faire un test unilatéral au niveau 5% pour conclure. Calculer la p-value. Calculer la puissance pour 55% de sachets en sous-poids.

Chap3 : Test d'ajustement d'une variance

Exercice 14 : Un client a remarqué que la durée de vie de ses ordinateurs a souvent une grande dispersion ($\sigma_0 = 5$ mois). Cela ne lui convient pas car il veut pouvoir renouveler son parc informatique en une seule fois. Un nouveau fournisseur affirme que l'écart-type de la durée de vie de ses nouvelles machines est réduit. Pour tester son information, nous observons 24 machines et mesurons un écart-type de $s^e = 2,5$ mois. Est-ce que la durée de vie des nouvelles machines a une dispersion plus faible que les anciennes (au niveau 5%) ?

Chap3 : Test de comparaison de moyennes

Exercice 15 : Un fabriquant de câbles en acier étudie un nouveau traitement de câbles pour améliorer leur résistance. Il choisit au hasard $n_1 = 200$ câbles traités et $n_2 = 100$ câbles non traités. On note X la charge de rupture d'un câble.

Pour les câbles traités, il observe $m_1 = 30,82$ $v_1^e = 27,25$ et pour les non-traités, $m_2 = 29,63$ $v_2^e = 23,99$.

Peut-on conclure à l'efficacité du traitement au niveau 5% ?

Exercice 16 : On veut comparer les salaires des cadres de deux entreprises 1 et 2. On tire au hasard un échantillon de taille $n_1 = 13$ dans la première entreprise et un échantillon de taille $n_2 = 10$ dans la deuxième. On a les résultats suivants :

Entreprise 1	63	61	62	65	62	64	66	63	60	63	60	64	63
Entreprise 2	60	58	57	60	57	59	60	60	65	61			

Y a-t-il une différence significative entre les deux entreprises (on supposera la normalité du salaire et l'égalité des variances et on fera un test au niveau 5%) ?

Chap3 : Test de comparaison de proportions

Exercice 17 : A la sortie de deux salles de cinéma donnant le même film, on a interrogé des spectateurs quant à leur opinion sur le film. Les résultats de ce sondage d'opinion sont les suivants :

Opinion	Mauvais film	Bon film	Total
Salle 1	30	70	100
Salle 2	48	52	100
Total	78	122	200

Peut-on dire que la proportion de personnes appréciant le film comme "bon" est différente entre les deux salles ?

Chap4 : Test du χ^2 d'indépendance

Exercice 18 : Le responsable ressource humaine s'intéresse à l'indicateur jours de maladies + accidents du travail du bilan social de trois filiales de sa société :

	filiale 1	filiale 2	filiale 3
jours maladies+AT	123	165	149
jours travaillés	2559	2545	2528

Faire un test d'indépendance du χ^2 pour déterminer si les filiales sont toutes équivalentes concernant cet indicateur.

Chap4 : Test du χ^2 d'adéquation à une loi uniforme

Exercice 19 : Le nombre de livres empruntés dans une bibliothèque pendant une semaine est : Lundi : 120 , Mardi : 100 , Mercredi : 115, Jeudi : 120 , Vendredi : 140. Tester si le nombre de livres emprunté suit une loi uniforme sur les jours de la semaine.