UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
UFR Droit, Sciences Économique et Politique

Mathématiques
Année 2024/2025
L2/S3

Examen final (1h30)

Aucun document n'est autorisé pendant la durée de l'épreuve. Les calculatrices et téléphones portables sont également interdits.

Exercice 1 (3 points)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1,2,3,-1)$, $u_2 = (1,1,1,2)$, $u_3 = (-3,-1,1,2)$ et $u_4 = (0,-2,1,5)$.

1. Échelonner la famille $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ relativement à la base canonique.
2. En déduire son rang.
3. Forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2 (7 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter la matrice $A + I$ et déterminer son rang.
2. Énoncer le théorème du rang.
3. Donner la dimension de $\ker(A+I)$ et justifier le fait que -1 est valeur propre de A.
4. Calculer l'autre valeur propre de A en utilisant la trace de A. On rappelle que la trace d'une matrice symétrique est égale à la somme de ses valeurs propres.
   On ne demande pas de calculer le polynôme caractéristique de A.
5. Déterminer l'espace propre $V(-1)$ (on donnera l'équation satisfaite par les vecteurs de $V(-1)$).
6. Mettre l'espace vectoriel $V(-1)$ sous la forme d'un sous-espace engendré par trois vecteurs à préciser.
7. Déterminer l'espace propre $V(3)$, que l'on mettra sous la forme d'un sous-espace engendré par un vecteur à préciser.

Exercice 3 (4 points)

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique p_B de B.
2. Rappeler la caractérisation des valeurs propres d'une matrice à l'aide du polynôme caractéristique.
3. En déduire la (ou les) valeur(s) propre(s) de B.

Exercice 4 (6 points)

1. (a) Rappeler la définition d'une matrice productive.
   (b) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$ est productive.
   (c) Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.
   On raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe $q = (q_1, q_2, q_3) \geq 0$ tel que $Bq < q$.
2. Soit A une matrice carrée positive telle que $4A^3 = 3A^2$.
   (a) Calculer $(I - A)(I + A + 4A^2)$.
   (b) Justifier le fait que la matrice $I + A + 4A^2$ est positive.
   (c) En déduire que la matrice A est productive (on rappellera le théorème de caractérisation des matrices productives).