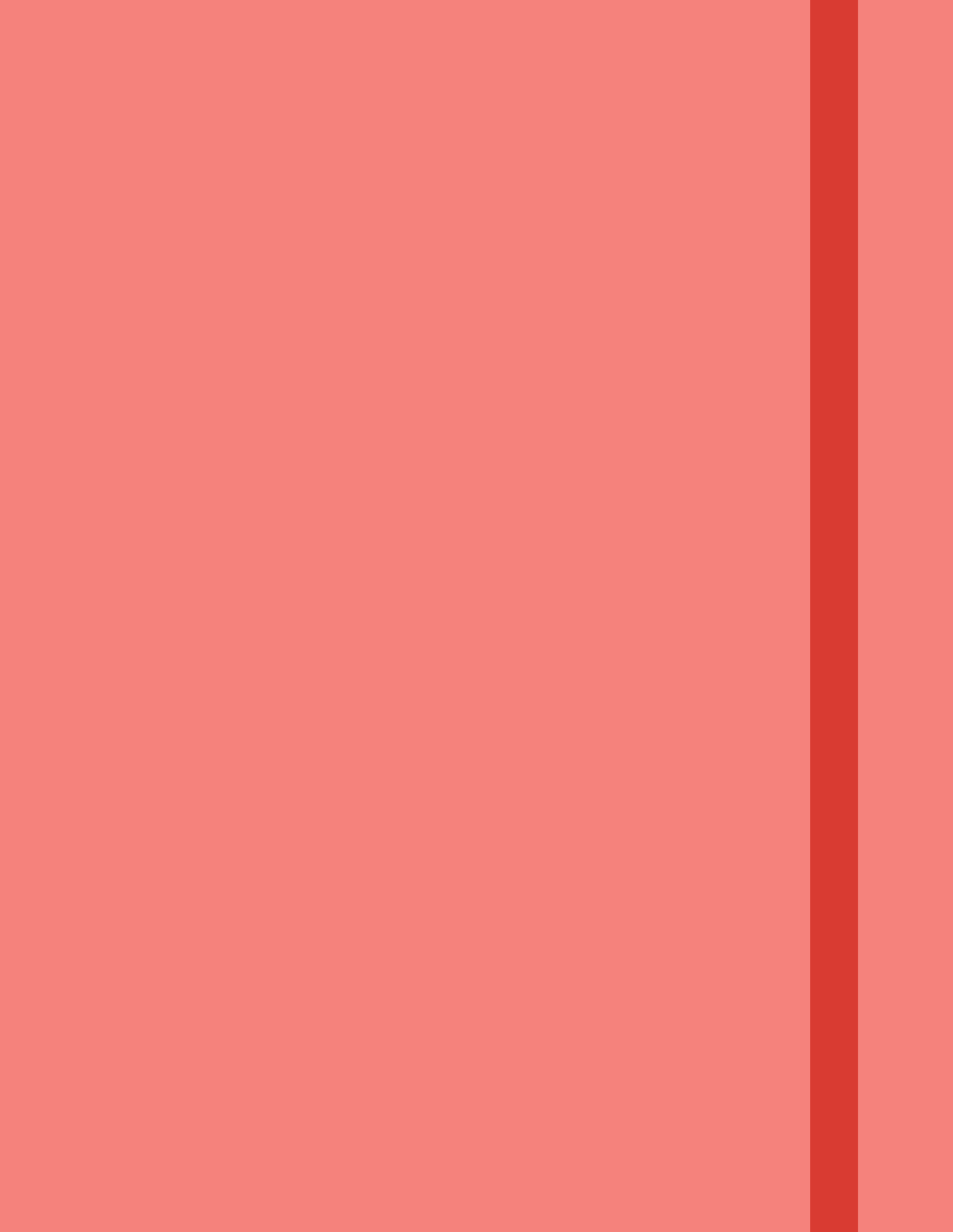




TD4 : Points critiques

(i) : $g(x) : \frac{x}{1+x^2}$ ← fonction rationnelle

• $Dg = \mathbb{R}$ ($g: \mathbb{R}$ sur les Dg)

• $g'(x) = \frac{u}{v} = \begin{cases} u = x & v = 1+x^2 \\ u' = 1 & v' = 2x \end{cases}$

$$\frac{u}{v} = \frac{u'xv - uxv'}{v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 \times (1+x^2) - x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \text{ si } \begin{cases} g(1) = 0 \\ g(-1) = 0 \end{cases} \text{ Les pts critiques}$$

• $g''(x)$: même principe que pour $g'(x)$:

$$\begin{cases} u = 1-x^2 \\ u' = -2x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v &= (1+x^2)^2 \\ v' &= 2 \times 2x(1+x^2) = 4x(1+x^2) \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \times (4x(1+x^2))}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

on voit " $(1+x^2)$ " qui se simplifie

$$= \frac{\cancel{(1+x^2)} [-2x(1+x^2) - (1-x^2)4x]}{(1+x^2)^3 \times \cancel{(1+x^2)}}$$

$$= \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$= \boxed{\frac{-6x + 2x^3}{(1+x^2)^3}}$$

• On injecte nos pts critiques
dans $g''(x)$: (de $g'(x)$)

$$\underline{g''(1)} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} < 0$$

Donc g présente un **maximum (local)**
en $x = 1$.

$$\underline{g''(-1)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0$$

Donc g présente un **minimum (local)**
en $x = -1$.

Rq : g est impaire ! car $g(-x) = -g(x)$
avec un max (1) et un min (-1)

donc la fonction tend vers 0 en $+\infty$

on peut le faire plus traditionnellement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = \boxed{0}$$

• Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	$\odot$	$+$	$\odot$	$-$
g	$\circ$				$\circ$

$\swarrow$ $-\frac{1}{2}$ $\nearrow$ $\frac{1}{2}$ $\searrow$ 0

on pourrait calculer l'équat^o
de la tangente.

$$\text{ii) } g(x) : x^3 + 3x^2 - x - 3$$

$$\bullet \text{ } \mathcal{D}g : \mathbb{R}$$

$$\bullet g'(x)$$

$$g'(x) = 3x^2 + 6x - 1$$

quand $g'(x) = 0$? on utilise Δ :

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 36 - 4 \times 3 \times (-1) \\ &= 36 + 12 = \boxed{48} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{48}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{48}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{48}}{6}$$

$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{48}}{6}$$

$$x_1 = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = -1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- On injecte dans $g''(x)$

$$g''(x) = 6x + 6$$

$$g''\left(-1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -4\sqrt{3} < 0 \rightarrow \text{max}$$

$$g''\left(-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 4\sqrt{3} > 0 \rightarrow \text{min}$$

x	$-\infty$	α_1	α_2	$+\infty$
$g'(x)$	+		-	+
$g(x)$	$-\infty$	$3,07$	$-3,07$	$+\infty$

Pour les limites:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\text{iii) } R(x) = P_m | x^2 - 5x + 4 |$$

• $\mathcal{D}_f: (c, d \text{ TD } \mathcal{D}_f)$, il faut que $x^2 - 5x + 4 \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{On pose } \Delta &= B^2 - 4ac \\ \Delta &= (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 \\ &= 25 - 16 = 9 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 + \sqrt{9}}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 - \sqrt{9}}{2} = 1.$$

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[\text{ ou } \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$$

• $R'(x)$

$$(P_m(u))' = \frac{u'}{u} \Leftrightarrow R'(u) = \frac{5u - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

$$R'(x) = 0 \text{ssi } \begin{cases} 5x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ x = 4 \text{ ou } 1 \end{cases} \quad \text{un seul pt critique car 1 et 4}$$

Valleur attendue!

• $P'(x)$

de la forme $\frac{u}{v}$ où $\begin{cases} u = 2x-5 & v = x^2-5x+4 \\ u' = 2 & v' = 2x-5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-5x+4) - (2x-5)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 10x + 8 - (2x-5)^2}{(x^2-5x+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 10x + 8 - (4x^2 - 2 \times 2x \times 5 + 25)}{(x^2-5x+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 10x + 8 - 4x^2 + 20x - 25}{(x^2-5x+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P''(x) = \frac{-2x^2 + 10x - 17}{(x^2-5x+4)^2}}$$

- On injecte P pt critique dans $P'(x)$

$$P''(5/2) = \frac{-2(3/2)^9 + 10(5/2) - 17}{(5/2)^2 - 5 \times (5/2) + 4} = \boxed{\frac{-8}{9}} < 0$$

Donc Max (local)

x	$-\infty$	1	$5/2$	4	$+\infty$
$P'(x)$	-		+ 0	-	+
$P(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$\text{iv) } K(x) = \frac{P_m(3x)}{x^2}$$

$$\bullet \text{) } \mathcal{D} = \mathbb{R}^{+*} \text{ ou }]0; +\infty[$$

car x doit être $\neq 0$ et $3x > 0$

$$\bullet K'(x)$$

$$\frac{u}{v} \text{ donc } \begin{cases} u = P_m(3x) & v = x \\ u' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x} & v' = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{1/x} \times x - P_m(3x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - P_m(3x)}{x^2}$$

$$K'(x) = 0 \text{ssi } \begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - P_m(3x) \neq 0 \Leftrightarrow P_m(3x) \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow e^{P_m(3x)} \neq e^1$$

$$\Leftrightarrow 3x \neq e$$

$$\Leftrightarrow x \neq \boxed{\frac{e}{3}}$$

Pt
critique

- $K''(u) = \frac{u}{v}$

$$\begin{cases} u = 1 - P_m(3x) & v = x^2 \\ u' = \frac{-3}{3x} = -1/x & v' = 2x \end{cases}$$

$$K''(u) = \frac{-1/x \times x^2 - (1 - P_m(3x)) \times 2x}{x^4}$$

$$\Rightarrow \frac{-x - (2x - 2x P_m(3x))}{x^4}$$

$$= \frac{-x - 2x + 2xx P_m(3x)}{x^4} = \boxed{\frac{-3x + 2xx P_m(3x)}{x^4}}$$

• On injecte :

$$K''\left(\frac{e}{3}\right) = \frac{-3\left(\frac{e}{3}\right) + 2 \times \left(\frac{e}{3}\right) \times P_m\left(3 \times \frac{e}{3}\right)}{\left(\frac{e}{3}\right)^4}$$

$$= -1,36 < 0 \text{ Max (local).}$$

• Tableau de Variation.

x	0	$\frac{e}{3}$	$+\infty$
$R'(x)$		$+$	$-$
$R(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{10}$	$\searrow 0$

Exo 7.2

i) $f(x, y) = 4x^2 + 8xy + 3y^2$

• Étape 1 : Trouver les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 8y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8x + 6y$$

• Étape 2 : on égalise à 0 et on résout nos 2 équations.

$$\begin{cases} 8x + 8y = 0 \\ 8x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x \\ 8x + 6(-4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x \\ 8x - 24x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x \\ 8x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Pts critiques au pt $(0; 0)$.

$$\text{ii) } g(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

• Étape 1:

$$\frac{dg}{dx} = 8x - 12y$$

$$\frac{dg}{dy} = -12x + 18y$$

• Étape 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x - 12y = 0 \\ -12x + 18y = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} L_1 = \frac{L_1}{2} \\ \Leftrightarrow \\ L_2 = \frac{L_2}{-3} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4x - 6y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{array} \right.$$

Ici $L_1 = L_2$ donc on pose 1 paramètre
 Ce système sous déterminé.

$$\text{Donc : } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{6}{4}y \\ y = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2}y \\ y = y \end{array} \right.$$

Infinité de solution, Donc l'ensemble
 des points critiques suit une droite égale à:
 $(\frac{3}{2}y; y)$.

iii) $f(x, y) = xy$

• $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x$

• $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Points critiques : $(0; 0)$.