Connect° Pantiel 2022 :

Exo 1 : Démonstration.

1) On cherche à démontrer que :

$$\begin{cases} \text{Moyenne Empirique} = \bar{Z}(x) = \boxed{0} & a) \\ \text{Variance Empirique du z-Score} = S^2_{Z(x)} = \boxed{1} & b) \end{cases}$$

a) $\boxed{\bar{Z}(x) = 0}$

On rappelle que $z_i(x) = \dfrac{x_i - \bar{x}}{S_x}$

$$\Leftrightarrow \bar{Z}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i(x).$$

$$\Leftrightarrow \bar{Z}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \times \left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x} \right)$$

* ici " S_x " est une constante Donc :

$$\Leftrightarrow \bar{Z}(x) = \frac{1}{N S_x} \times \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})$$

* Propriété ⚠ : formule de la somme des écarts :

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{x} \right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{Z}(x) = \frac{1}{N S_x} \times \left[\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{x} \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \bar{Z}(x) = \frac{1}{N S_x} \times \left(N\bar{x} - N\bar{x} \right) = \frac{1}{N S_x} \times (0) = 0$$

6) Variance empirique : S_x^2

On rappelle que :

$$S_{z(x)}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(z_i(x) - \bar{z}(x) \right)^2$$

$\Leftrightarrow$ On sait que $\bar{z}(x) = 0$ Donc

$$S_{z(x)}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(z_i(x) \right)^2$$

* On développe $z_i(x)$

$$\Leftrightarrow S_{z(x)}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{S_x} \right)^2$$

* Comme pour 4)

S_x constante donc

$$\Leftrightarrow S_{z(x)}^2 = \frac{1}{(N-1) \times S_x^2} \times \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

On sait que, d'après la définition de la Variance :

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = (N-1) S_x^2$$

$$\Leftrightarrow S_{z(x)}^2 = \frac{1}{\cancel{(N-1) S_x^2}} \times \cancel{(N-1) S_x^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S_{z(x)}^2 = 1}$$

ZGESTION +
07 66 79 59 45

2) Covariance empirique :

On veut Démontrer que :

$$S_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i - \frac{N}{N-1}\bar{x}\bar{y}$$

On part de :

$$S_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

$$\Leftrightarrow S_{xy} = \frac{1}{N-1}\times\sum_{i=1}^{N}\left(x_iy_i - \bar{y}x_i - \bar{x}y_i + \bar{x}\bar{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{xy} = \frac{1}{N-1}\times\left(\sum_{i=1}^{N}x_iy_i - \bar{y}\times\sum_{i=1}^{N}x_i - \bar{x}\times\sum_{i=1}^{N}y_i + \bar{x}\bar{y}\times\sum_{i=1}^{N}1\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{xy} = \frac{1}{N-1}\times\left(\sum_{i=1}^{N}x_iy_i - \bar{y}(N\bar{x}) - \bar{x}(N\bar{y}) + \bar{x}\bar{y}\times N\right)$$

$$: \left\{ \sum_{i=1}^{N}x_i = N\bar{x} \;;\; \sum_{i=1}^{N}y_i = N\bar{y} \;;\; \sum_{i=1}^{N}1 = N\times 1 = N \right.$$

$$\Leftrightarrow S_{xy} = \frac{1}{N-1}\times\left(\sum_{i=1}^{N}x_iy_i - \bar{x}\bar{y}N\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i - \frac{1}{N-1}\bar{x}\bar{y}N \Leftrightarrow \boxed{S_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i - \frac{N}{N-1}\bar{x}\bar{y}}$$

3) Deuxième forme de la Covariance Empirique

$$S_{xy} : \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} x_i (y_i - \bar{y})$$

$$\Leftrightarrow S_{xy} : \frac{1}{N-1} \times \left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{N} x_i \right)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = N\bar{x}$$

$$\Leftrightarrow S_{xy} : \frac{1}{N-1} \times \left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \bar{y}(N\bar{x}) \right)$$

$$\Leftrightarrow S_{xy} : \frac{1}{N-1} \times \left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\bar{x}\bar{y} \right)$$

Donc

$$\Leftrightarrow \boxed{S_{xy} = \frac{1}{N-1} \times \sum_{i=1}^{N} x_i (y_i - \bar{y})}$$

Exo 2

Ici $N = 6$

1) Pour étudier la relation entre x_i et y_i, on va s'intéresser aux signes des produits de $z_i(x)$ et $z_i(y)$.

(N_i)

i	$z_i(x)$	$z_i(y)$	$z_i(x) \times z_i(y)$	Corrélation
1	0,90	0,67	+	corrélation positive
2	1,06	-0,65	−	corel. Négative
3	-0,16	1,68	−	Corel. Négative
4	-0,75	-1,11	+	Corel. Positive
5	-1,51	-0,36	+	Corel. Positive.
6	0,45	-0,11	−	Corel. Neg.

⇒ Conclusion :

Même nombre de corel. Positive que Corel Negative.

Coef de corrélation proche de 0, en principe on ne peut pas conclure. On peut simplement dire qu'il y a une faible relation entre x et y.

2)

$$G_1(x) = \frac{m_3(x)}{S_x^3}$$ → moment centré d'ordre 3

$m_3(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^3$ et on sait que $S_{z(x)} = 1$ Donc

$$G_1(x) = m_3(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^3$$

$$\boxed{\text{Donc } G_1(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i(x))^3}$$

i	$z_i(x)$	$z_i(x)^3$
1	0,90	$(0,90)^3 \approx 0,73$
2	1,06	1,49
3	-0,16	0,00
4	-0,75	-0,42
5	-1,51	-3,44
6	0,45	0,09

* on prend ici 2 chiffres après la virgule car dit en Page 1.

Somme des $z_i(x)^3 = \boxed{-1,85}$

$$G_1 = 1/6 \times (-1,85)^3 \approx \boxed{-0,31}$$

Interprétation : $G_1 < 0$ donc la distribut° de la variable x est asymétrique à gauche.

3) $G_2(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (z_i(y))^4$

Même principe que pour le **2)** sauf qu'on traite les valeurs de y et on élève le z-score à la puissance 4.

i	$z_i(y)$	$z_i(y)^4$
1	0,67	$0{,}67^4 \simeq 0{,}20$
2	-0,45	$(-0{,}45)^4 \simeq 0{,}04$
3	1,68	7,97
4	-1,11	1,50
5	-0,36	0,02
6	-0,41	0,03

Somme des $Z_i(y)^4$ $= \boxed{9{,}76}$

$$G_2(y) = \frac{1}{6} \times 9{,}76 = \boxed{1{,}63}$$

$G_2(y) < 3{,}00$ donc la distribution de y est platykurtique.

(cf cours pour voir les différents coef et leurs paliers).

4) $r_{xy} = \dfrac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} z_i(x)\, z_i(y)$

i	$z_i(x)$	$z_i(y)$	$z_i(x) \times z_i(y)$
1	0,90	0,67	0,60
2	1,06	-0,45	-0,48
3	-0,16	1,68	-0,27
4	-0,75	-1,11	0,83
5	-1,51	-0,36	0,54
6	0,45	-0,41	-0,18

Somme des Produits $= \boxed{1,04}$

$r_{xy} = \dfrac{1}{6-1} \times 1,04 = \dfrac{1}{5} \times 1,04 = 0,208 = \boxed{0,21}$

INTĒRPRÉTATION :

Signe ⊕ mais proche de 0 donc il existe une très faible corrélation linéaire positive entre x et y.

De plus ça justifie bien notre déduction établie à la question 1.

Exo 3

Q1 : $\boxed{25\%}$ Donc Sachant que

N = 62 ; On fait $0,25 \times 62 = 15,5$.

On prend donc l'entier le + proche

qui est 16.

Donc $x_{(16)} = \boxed{11,3 = Q1}$

INTERPRETATION :

Au moins 25 % des 62 Pays ont un pourcentage d'entreprises dirigées par des femmes $\leq 11,30\%$

ZGESTION +

07 66 78 59 45

Q2 : 50 % = 0,50 → Médiane Donc :

$$Q2 = \frac{x_{(j)} + x_{(j+1)}}{2}$$

m̂ principe :

$$0,50 \times 62 = \overset{j}{31}$$

Où $x_{(31)} = 17,2$ et $x_{(32)} = 17,7$

Donc $Q2 = \frac{17,2 + 17,7}{2} = \boxed{17,3}$

INTÈRPRÉTATION :

La moitié des pays ont un pourcentage ≤ à 17,30 % et l'autre moitié a un pourcentage supérieur.

Pourquoi la moitié, car le Q2 soit la médiane, divise la population en deux.

ZGESTION +

07 66 78 59 45

$$\boxed{Q_3 = 75\% = 0,75}$$

$0,75 \times 62 = 46,5$. Soit l'entier le plus proche $\to 47$.

Donc $\boxed{Q_3 = x_{(47)} = 21,8}$

INTERPRÉTATION :

Au moins 75% des pays ont un pourcentage d'entreprises dirigées par des femmes inférieur ou égal ($= \leq$) à 21,80%

2)

a) Moyenne empirique ⇒ $\bar{x}$

On rappel : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$ donc on a :

$$\sum_{i=1}^{62} x_i = 1072,8.$$

Donc $\bar{x} = \frac{1}{62} \times 1072,8$

$$\boxed{\bar{x} = 17,30}$$

b) Variance empirique

On rappel : $S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$

À écrire pour faire bonne impression : on utilise la formule de König-Huyghens (soit de la variance) :

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - N\bar{x}^2$$

Donc : $23\,092,58 - 62 \times (17,30)^2 \simeq \boxed{4536,6}$

Ainsi : $S_x^2 = \frac{1}{62-1} \times 4536,6 = \boxed{74,37}$

ZGESTION +
07667859

c) m_3

$$m_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^3$$

$$m_3 = \frac{49\,982,32}{62} \simeq 322,2954$$

$$m_3 = 322,30$$

INTERPRÉTATION:

m_3 est > 0 donc la distribution est asymétrique à droite.

d) m_4

$$m_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^4$$

$$m_4 = \frac{1\,157\,437,82}{62} \simeq 18\,668,3519$$

$$\boxed{m_4 = 18\,668,35}$$

e) La distribution est-elle symétrique ?

on va utiliser le coef d'Asymétrie Empirique qui est b_1.

$$b_1 = \frac{m_3}{S_x^3}$$

$S_x^2 = 74,37$ donc $S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{74,37} \simeq \boxed{8,62}$

c)

$$b_1 = \frac{m_3}{S_x^3} = \frac{322,30}{(8,62)^3} \simeq 0,5032$$

$$\boxed{b_1 \simeq 0,50}$$

INTREPRÉTATION :

$b_1 \simeq 0,50 > 0$ et est éloigné de 0

Donc la distribut° n'est pas **Symétrique**, elle est fortement asymétrique à droite, ce qui confirme notre m_3

ZGESTION+
07 66 78 59 45