UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
UFR Droit, Sciences Économique et Politique

Mathématiques
Année 2022/2023
L2/S3

Examen final (1h30)

Aucun document n'est autorisé pendant la durée de l'épreuve. Les calculatrices et téléphones portables sont également interdits.

Exercice 1 (4 points)
Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si oui, donner une famille génératrice de ce sous-espace vectoriel.

1. $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1\}$.
2. $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$.
3. $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 > 0\}$.

Exercice 2 (4 points)
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1, 3)$, $u_2 = (2, -1, 0, 1)$ et $u_3 = (-3, 4, -1, 1)$.

1. Échelonner la famille $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ relativement à la base canonique.
2. En déduire son rang.
3. Forme-t-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$?
4. Expliciter la relation linéaire qui lie les vecteurs u_1, u_2 et u_3.

Exercice 3 (8 points)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Que vaut le rang de A ? On justifiera sa réponse.
2. Énoncer le théorème du rang.
3. Donner la dimension de $\ker A$ et justifier le fait que 0 est valeur propre de A.
4. Calculer l'autre valeur propre de A en utilisant la trace de A. On rappelle que la trace d'une matrice symétrique est égale à la somme de ses valeurs propres.
   On ne demande pas de calculer le polynôme caractéristique de A.
5. Rappeler la définition du sous-espace propre $V(\lambda)$ associé à une valeur propre λ.
6. Déterminer l'espace propre $V(0)$ (on donnera l'équation satisfaite par les vecteurs de $V(0)$).
7. Mettre l'espace vectoriel $V(0)$ sous la forme d'un sous-espace engendré par trois vecteurs à préciser.
8. Déterminer l'espace propre $V(4)$, que l'on mettra sous la forme d'un sous-espace engendré par un vecteur à préciser.

Exercice 4 (4 points)
On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique p_B de B.
2. Rappeler la caractérisation des valeurs propres d'une matrice à l'aide du polynôme caractéristique.
3. En déduire la (ou les) valeur(s) propre(s) de B.