

MATHÉMATIQUES DE L'ÉCONOMIE

Bibliographie

- B. GUERRIEN, *Algèbre linéaire pour économistes*, Economica, Paris, 1991.
- N. HAYEK et J.-P. LECA, *Mathématiques pour l'économie*, Dunod, Paris, 2011.

MODALITES D'EXAMEN

► **Le contrôle continu (CC)**

Il est constitué de deux épreuves écrites organisées en TD. Le premier CC a lieu lors de la cinquième semaine de TD, tandis que le deuxième a lieu la dernière semaine.

► **Le contrôle terminal (CT)**

Il s'agit d'une épreuve écrite de 2h, organisée en amphi.

La note finale est calculée suivant la formule $NF = (CC + 2CT)/3$.

► **La session de rattrapage**

Il s'agit d'une épreuve écrite de 2h qui se déroule dans les mêmes conditions que celles de l'examen de première session.

RESUME DE COURS

1 Structure d'espace vectoriel

L'objet de ce chapitre est de définir ce qu'on entend par structure d'espace vectoriel et d'introduire les notions classiques de l'algèbre linéaire.

1.1 Espace $\mathbb{R}^n$ et sous-espace vectoriel

Définition

On note par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}.$$

Un élément de $\mathbb{R}^n$ est donc de la forme

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

où les composantes de $\vec{x}$, c'est-à-dire les x_i , $1 \leq i \leq n$, sont des nombres réels.

Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ est un scalaire, on définit la somme de $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et le produit de $\vec{x}$ par le scalaire λ en posant respectivement

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \times \vec{x} &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).\end{aligned}$$

Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$. On montre facilement que ces opérations vérifient les propriétés suivantes :

$$(EV1): (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$$

$$(EV2): \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$(EV3): \text{Pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ on a}$$

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$$

$$(EV4): \text{Pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ il existe un vecteur noté } (-\vec{x}) \text{ tel que}$$

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$$

$$(EV5): (\lambda + \mu) \times \vec{x} = \lambda \times \vec{x} + \mu \times \vec{x} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$(EV6): \lambda \times (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \times \vec{x} + \lambda \times \vec{y} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$(EV7): \lambda \times (\mu \times \vec{x}) = (\lambda\mu) \times \vec{x} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$(EV8): 1 \times \vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Pour simplifier les notations, on ne marque pas le signe $\times$ pour indiquer l'action de l'opération multiplication et sauf s'il y a risque de confusion, on supprime la *flèche* sur les vecteurs.

Définition

Les axiomes (EV1)-(EV8) définissent sur $\mathbb{R}^n$ une structure d'espace vectoriel. On dit que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition (*sous-espace vectoriel*)

On appelle sous-espace vectoriel (sev) de $\mathbb{R}^n$, une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés

1. $\vec{0} \in F$.
2. $x + y \in F, \forall x, y \in F$ (stabilité pour l'addition)
3. $\lambda x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in F$ (stabilité pour la multiplication par les scalaires).

Exemple.

On vérifie facilement que le sous-ensemble

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Géométriquement, F définit un plan passant par l'origine $(0, 0, 0)$. Remarquons que l'ensemble

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}$$

est encore un plan, mais il ne passe pas par l'origine, de sorte que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble G se déduit de F par translation, on dit qu'il s'agit d'un sous-espace affine (c'est un plan affine).

Exemple.

On vérifie facilement que le sous-ensemble

$$H = \{\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(0, 1, -1), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Géométriquement, H est le plan dirigé par les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(0, 1, -1)$.

1.2 Concepts fondamentaux**Définition (*combinaison linéaire de vecteurs*)**

Soit $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ une famille de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle combinaison linéaire des vecteurs de S toute expression du type

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i$$

où les λ_i sont des scalaires quelconques.

Définition (*sous-espace vectoriel engendré*)

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On appelle sous-espace vectoriel engendré par A le sous espace vectoriel

$$\text{Vect}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i; \lambda_i \in \mathbb{R}, \vec{v}_i \in A, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

constitué de toutes les combinaisons linéaires possibles des vecteurs de A .

Exemple. L'espace vectoriel H défini dans la section précédente n'est autre que le sous-espace vectoriel engendré par $A = \{(1, 1, 1), (0, 1, -1)\}$

$$H = \text{Vect} \{(1, 1, 1), (0, 1, -1)\}.$$

Définition (*famille liée*)

On dit qu'une famille $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est liée (ou encore que les vecteurs de S sont linéairement dépendants) s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

De façon équivalente, la famille $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs $\vec{v}_i$ est combinaison linéaire des autres.

Exemple. Supposons que la famille S ne contienne qu'un seul vecteur $\vec{v}$. Alors

$$S = \{\vec{v}\} \text{ est liée si et seulement si } \vec{v} = \vec{0}.$$

Exemple. Supposons que la famille S contienne deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Alors

$$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ est liée si et seulement si } \vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_2 \text{ sont } \underline{\text{colinéaires}}.$$

Définition (*famille libre*)

On dit qu'une famille $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre (ou encore que les vecteurs de S sont linéairement indépendants) si elle n'est pas liée.

Il résulte de la définition que la famille $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est libre si et seulement si

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0 \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, k.$$

Exemple. Considérons les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$, $\vec{v}_3 = (2, 1, 0)$ et $\vec{v}_4 = (1, -1, 3)$.

- . La famille $S_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ car $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires.
- . La famille $S_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est également libre. On le vérifie facilement en utilisant la caractérisation ci-dessus.
- . La famille $S_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ n'est pas libre. Les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_4$ sont en effet liés par la relation $\vec{v}_4 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$.

Définition (*rang d'une famille*)

On appelle rang d'une famille $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$ le nombre r maximal de vecteurs indépendants que l'on peut extraire de cette famille. On note $r = \text{rg}(S)$.

Il découle immédiatement de la définition que $\text{rg}(S) \leq \text{card}(S)$, où $\text{card}(S)$ désigne le nombre d'éléments de S . De plus, $\text{rg}(S) = \text{card}(S)$ si et seulement si S est libre.

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, on voit que $\text{rg}(S_1) = 2$, $\text{rg}(S_2) = 3$ et $\text{rg}(S_3) = 2$.

Un autre concept important est celui de famille génératrice.

Définition (*famille génératrice*)

On dit qu'une famille $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de k vecteurs d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ est génératrice de V si tout vecteur $\vec{x} \in V$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de S .

On peut donc dire que V est le sous-espace vectoriel engendré par S , c'est-à-dire $V = \text{Vect}(S)$. Introduisons à présent le concept fondamental de base.

Définition (*base*)

On appelle base d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ toute famille β libre et génératrice de V .

Définition (*base canonique de $\mathbb{R}^n$*)

On appelle base canonique de $\mathbb{R}^n$ la famille $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ dont les vecteurs $\vec{e}_i$ sont donnés par $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Proposition (*existence et unicité de la décomposition dans une base*)

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ une base de V . Alors tout vecteur $\vec{x} \in V$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de β . Il existe donc des scalaires x_i uniques, appelés composantes (ou encore coordonnées) de $\vec{x}$ dans la base β , tels que

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^k x_i \vec{v}_i.$$

Il est d'usage de regrouper les composantes d'un vecteur $\vec{x}$ dans une base sous forme d'un vecteur-colonne et d'écrire

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

bien que cette notation, qui consiste à identifier un vecteur $\vec{x} \in V$ avec le vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ puisse prêter à confusion. On verra dans le chapitre suivant l'intérêt de mettre les x_i en colonne et donc de les voir comme un vecteur-colonne.

Avant de définir le concept de dimension, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $L = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ est une famille libre de vecteurs de V et si $G = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$ est une famille génératrice de V , alors $p \leq m$.

Théorème (de la dimension)

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Toutes les bases de V ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de V et se note $\dim V$.

Puisque la base canonique de $\mathbb{R}^n$ contient n éléments, on voit que $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Théorème

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que $\dim V = k$.

- . Toute famille libre de V comporte au plus k vecteurs.
- . Une famille libre de V qui comporte k vecteurs est une base de V .

Théorème

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que $\dim V = k$.

- . Toute famille génératrice de V comporte au moins k vecteurs.
- . Une famille génératrice de V qui comporte k vecteurs est une base de V .

Théorème (de la base incomplète)

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que $\dim V = k$. Soit $L = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ une famille libre de p vecteurs de V . Alors il existe $k - p$ vecteurs $\vec{w}_{p+1}, \vec{w}_{p+2}, \dots, \vec{w}_k$ de V tels que la famille $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{w}_{p+1}, \dots, \vec{w}_k\}$ soit une base de V .

Le théorème suivant permet de faire le lien entre les notions de rang et de dimension.

Théorème (rang et dimension)

Le rang d'une famille $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par S

$$\text{rg}(S) = \dim(\text{Vect}(S)).$$

La proposition suivante donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de vecteurs soit libre ou génératrice.

Proposition (Caractérisations à l'aide du rang)

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit S une famille de p vecteurs de V . Alors on a :

. $\text{rg}(S) \leq \text{card}(S)$ et de plus

$$\text{rg}(S) = \text{card}(S) \Leftrightarrow S \text{ libre.}$$

. $\text{rg}(S) \leq \dim(V)$ et de plus

$$\text{rg}(S) = \dim(V) \Leftrightarrow S \text{ génératrice de } V.$$

Nous allons maintenant développer une technique très efficace pour obtenir le rang d'une famille.

Définition (vecteurs échelonnés)

Soit $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Pour tout vecteur $\vec{v}_i$ non nul de la famille S , on note j_i l'indice de sa première composante non nulle dans une base β de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que $\vec{v}_i = (0, \dots, 0, v_{j_i, i}, \dots, v_{n, i})$, avec $v_{j_i, i} \neq 0$. On dit que la famille S est échelonnée relativement à β s'il existe un entier $r \leq p$ tel que :

► la suite $(j_i)_{1 \leq i \leq r}$ soit strictement croissante,

► si $r < p$, on ait $\vec{v}_i = \vec{0}$ pour $r < i \leq p$.

Un exemple de vecteurs échelonnés (mis en colonnes) est donné par

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Les indices des premières composantes non nulles des quatre premières colonnes sont respectivement $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 4$ et $j_4 = 5$, $p = 5$ et $r = 4$. Les vecteurs sont échelonnés car les indices forment une suite strictement croissante. L'intérêt d'avoir des vecteurs échelonnés est donné par le résultat suivant.

Lemme (rang d'une famille échelonnée)

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, β une base de V et $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ une famille échelonnée relativement à β de p vecteurs de V . Alors

$$\text{rg}(S) = r, \quad \text{où } r \text{ désigne le nombre de vecteurs non nuls de } S.$$

En particulier, si tous les vecteurs de S sont non nuls, alors S est libre.

Lorsque des vecteurs ne sont pas échelonnés, on peut les échelonner via les transformations suivantes.

Lemme (transformation d'une famille par combinaisons)

Soit $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\tilde{S} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{w}_i, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_p\}$ la famille obtenue en remplaçant le vecteur $\vec{v}_i$ de S par une combinaison linéaire $\vec{w}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_i \vec{v}_i + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$ des vecteurs de S avec $\underline{\alpha_i \neq 0}$. Alors on a les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} S \text{ libre} &\Leftrightarrow \tilde{S} \text{ libre} \\ \text{Vect}(S) &= \text{Vect}(\tilde{S}) \\ \text{rg}(S) &= \text{rg}(\tilde{S}). \end{aligned}$$

Dans l'exemple suivant, on va montrer le rôle que joue l'échelonnement dans le calcul du rang d'une famille. Prenons la famille

$$\begin{array}{cccc} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 & \vec{c}_4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

qui n'est pas échelonnée. En multipliant la seconde colonne par 2 et en soustrayant la première colonne on obtient la famille de même rang

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{array}$$

Par combinaison des colonnes 3 et 1, puis des colonnes 4 et 1 on obtient

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -8 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \\ 6 & 2 & -8 & -5 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

Ensuite par combinaison des colonnes 3 et 2, puis des colonnes 4 et 2 on obtient

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & -6 & -5 \\ -1 & 3 & 6 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -6 & -3 \\ -1 & 3 & 6 & 3 \end{array}$$

Enfin par combinaison des colonnes 4 et 3, on obtient

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

La famille ainsi obtenue est échelonnée. La dernière colonne étant nulle, elle est de rang 3. Les transformations ayant préservé le rang, la famille $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4\}$ est donc de rang 3.

De plus, en reconstituant les transformations ayant conduit à obtenir un vecteur nul dans la dernière colonne on obtient

$$2[(\vec{c}_4 - \vec{c}_1) + (2\vec{c}_2 - \vec{c}_1)] - [(2\vec{c}_3 - \vec{c}_1) + (2\vec{c}_2 - \vec{c}_1)] = \vec{0},$$

soit encore

$$\vec{c}_4 - \vec{c}_1 + \vec{c}_2 - \vec{c}_3 = \vec{0},$$

ce qui permet d'explicitier la relation linéaire qui lie les vecteurs $\vec{c}_i$.

1.3 Passage d'une écriture vectorielle à une écriture en équations et réciproquement

Pour mettre en équations le sous-espace vectoriel engendré par la famille $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$, nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme

Soit $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ une famille de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\vec{x} \in \text{Vect}(S) \text{ si et seulement si } \text{rg}(S) = \text{rg}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{x}\}).$$

Il suffit alors d'échelonner la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{x}\}$ où $\vec{x}$ représente le vecteur courant du sous-espace vectoriel, et d'écrire la (les) condition(s) sur les composantes de $\vec{x}$ qui assurent que $\text{rg} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} = \text{rg} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k, \vec{x}\}$.

Par exemple, considérons le sous-espace vectoriel $V := \text{Vect}\{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$. Pour mettre V sous forme d'équations, on utilise l'argument suivant :

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$ si et seulement si les familles $\{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1)\}$ et $\{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ possèdent le même rang. La famille $\beta = \{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1)\}$ est échelonnée, donc son rang est égal à deux, et par suite le rang de la famille $\{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ est aussi égal à deux.

Ecrivons la dernière famille en colonnes:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{array}$$

Si on multiplie la première colonne par x_1 et on la retranche à la dernière, on obtient

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & 2 & x_3 - x_1 \\ 1 & 1 & x_4 - x_1 \end{array}$$

Si on multiplie cette fois-ci la deuxième colonne par $x_1 + x_2$ et on la retranche à la dernière, on obtient

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & x_3 - 3x_1 - 2x_2 \\ 1 & 1 & x_4 - 2x_1 - x_2 \end{array}$$

Comme le rang de la famille est égal à deux, on obtient les équations

$$x_3 - 3x_1 - 2x_2 = 0 \text{ et } x_4 - 2x_1 - x_2 = 0.$$

Ainsi

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 - 3x_1 - 2x_2 = 0, x_4 - 2x_1 - x_2 = 0\}.$$

Montrons inversement comment l'on passe de l'écriture en équations ci-dessus à une écriture vectorielle. On a

$$\begin{aligned} V &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 = 3x_1 + 2x_2, x_4 = 2x_1 + x_2\} \\ &= \{(x_1, x_2, 3x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2), x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, 0, 3, 2) + x_2(0, 1, 2, 1), x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(1, 0, 3, 2), (0, 1, 2, 1)\}. \end{aligned}$$

Remarque Notons qu'on a choisi x_1 et x_2 comme paramètres. Un autre choix aurait conduit à une autre famille génératrice de V .

2 Matrices

2.1 L'espace vectoriel des matrices $m \times n$

On entend par matrice de format (ou de taille) $m \times n$ à coefficients réels toute application

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Une matrice est donc une application dont le domaine de définition est très particulier. Pour cette raison et aussi pour des raisons de commodité d'écriture, on note a_{ij} l'image du couple (i, j) et on dispose les mn nombres réels a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ sous forme d'un tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

à m lignes et n colonnes. On observera que les valeurs de A , on dit aussi les coefficients de A , sont notées avec deux indices, le premier indice i faisant référence au numéro de ligne et le second indice j au numéro de colonne de la matrice. Si la matrice est carrée, c'est-à-dire si $m = n$, on dit simplement que la matrice est d'ordre n .

Définition (trace d'une matrice)

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On appelle trace de A la somme de ses termes diagonaux, c'est-à-dire la quantité

$$\text{tr } A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Définition (matrices particulières)

Si A est une matrice carrée d'ordre n , on dit que A est

1. diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$,
2. triangulaire supérieure (resp. inférieure) si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$ (resp. pour tout $i < j$).

Soient A et B deux matrices de format $m \times n$ (donc de même taille)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

et λ un scalaire, on définit la somme de A et B et le produit de λ par A comme suit

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $\mathcal{M}(m, n)$ des matrices de format $m \times n$ à coefficients réels, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit M_{ij} la matrice de format $m \times n$, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i^e ligne et de la j^e colonne qui est égal à 1

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{colonne } j \\ \downarrow \\ \leftarrow \text{ligne } i \end{matrix}$$

On vérifie aisément que la famille $\{M_{ij}, 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq n\}$ est une base de $\mathcal{M}(m, n)$. L'espace vectoriel $\mathcal{M}(m, n)$ est donc de dimension mn .

Définition (produit matriciel)

Si A est une matrice de format $m \times n$ et B une matrice de format $n \times p$, on définit le produit de A par B (attention à l'ordre) comme étant la matrice C de format $\underline{m} \times \underline{p}$ dont le coefficient c_{ij} sur la i ème ligne et la j ème colonne est donné par

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

On note $C := AB$.

On observera que le coefficient c_{ij} est simplement obtenu en effectuant le produit scalaire euclidien de la i ème ligne de A et la j ème colonne de B . Cela suggère pour effectuer les calculs de façon pratique de disposer les matrices de la façon suivante.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \downarrow & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \downarrow & & \vdots \\ \rightarrow & \rightarrow & \boxed{c_{ij}} & & \rightarrow \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mi} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

On doit tout de suite mettre en garde sur l'ordre à respecter dans un produit matriciel. En général on a $AB \neq BA$. Par exemple, si on prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On voit que $AB \neq BA$. On dit alors que les matrices A et B ne commutent pas.

Proposition (propriétés usuelles du produit matriciel)

Si A , B et C désignent trois matrices, sous réserve de compatibilité entre leur format, on a les relations suivantes:

1. $A(BC) = (AB)C$,
2. $A(B+C) = AB + AC$,
3. $(A+B)C = AC + BC$.

2.2 Image, noyau et théorème du rang**Définition (rang d'une matrice)**

Soit A une matrice de format $m \times n$. On appelle rang de A et on note $\text{rg } A$ le rang des colonnes $A_1, \dots, A_n$ de A .

On a toujours $\text{rg } A \leq m$ et $\text{rg } A \leq n$, d'où $\text{rg } A \leq \min(m, n)$.

Définition (rang maximal)

Soit A une matrice de format $m \times n$. La matrice A est dite de rang maximal si $\text{rg } A = \min(m, n)$.

Définition (noyau)

Soit A une matrice de format $m \times n$. On appelle noyau de A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\text{Ker}A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

Définition (*image*)

Soit A une matrice de format $m \times n$. On appelle image de A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$\text{Im}A = \{Ax; x \in \mathbb{R}^n\}.$$

On peut donner une relation entre $\text{Im}A$ et les colonnes de A .

Proposition

Soit A une matrice de format $m \times n$ dont les colonnes sont désignées par $A_1, \dots, A_n$. Alors

$$\text{Im}A = \text{Vect}\{A_1, \dots, A_n\}.$$

Il suit de cette proposition que

$$\dim(\text{Im}A) = \text{rg } A.$$

Théorème (*théorème du rang ou des dimensions*)

Soit A une matrice de format $m \times n$. Alors

$$n = \text{rg } A + \dim(\text{ker}A).$$

2.3 Transposition des matrices

Définition (*transposée d'une matrice*)

Soit A une matrice de format $m \times n$. On appelle transposée de A la matrice de format $n \times m$, notée A^T (ou encore A' par les statisticiens et les économètres), et définie par

$$a_{ij}^T := a_{ji} \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Proposition (*propriétés de la transposition*)

Si A et B désignent deux matrices et si x et y désignent des vecteurs colonnes, sous réserve (si nécessaire) de compatibilité de leur format, on a:

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$,
5. $\text{rg } A = \text{rg } A^T$,
6. $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien.

Définition (*matrice symétrique*)

Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est symétrique si $A = A^T$. Ceci revient à dire que

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Définition (*matrice semi-définie positive*)

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

- On dit que A est semi-définie positive si on a

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$
 où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien. Si l'inégalité est renversée, on dit que A est semi-définie négative.
- On dit que A est définie positive si on a

$$\langle Ax, x \rangle > 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$
 Si l'inégalité est renversée, on dit que A est définie négative.

Si l'inégalité est renversée, on dit que A est définie négative.

Soit I_n la matrice identité d'ordre n définie par

Soit I_n la matrice identité d'ordre n définie par

Cette matrice est neutre pour le produit matriciel : pour toute matrice carrée A d'ordre n , on a $AI_n = I_n A = A$.

Si B existe, B est unique et on note $B = A^{-1}$. On dit que A^{-1} est la matrice inverse de A .

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

On appelle système linéaire un système de p équations à n inconnues de la forme

11

Résoudre le système linéaire consiste à expliciter l'ensemble

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$$

(éventuellement vide) constitué de tous les x (s'il en existe) dont les composantes x_i vérifient simultanément les p équations.

Définition (*système homogène*)

Lorsque les b_i sont tous nuls, on dit que le système (S) est homogène.

Au système linéaire (S) $Ax = b$, on peut donc associer le système homogène $Ax = 0$. L'ensemble des solutions de ce système homogène coïncide avec $\ker A$ (le noyau de A).

Définition (*compatibilité*)

On dit que le système (S) est compatible si l'ensemble S de ses solutions est non vide.

On note que

$$S \neq \emptyset \iff b \in \operatorname{Im} A.$$

Proposition (*structure de l'ensemble des solutions*)

- L'ensemble $\ker A$ des solutions du système homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- Si u et v sont solutions du système linéaire (S) , alors $u - v \in \ker A$.
- Si x_0 est solution de (S) , alors l'ensemble S des solutions du système (S) s'obtient en ajoutant à x_0 l'ensemble des solutions du système homogène associé, c'est-à-dire

$$S = x_0 + \ker A.$$

3 Déterminants

3.1 Notion de déterminant

Définition (*formes n-linéaires alternées*)

Soit $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est une forme n -linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. l'application $\vec{x}_i \rightarrow f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n)$ est linéaire (pour tout i)
2. $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = -f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n)$.

Le terme n -linéaire signifie que la fonction est linéaire relativement à chacune de ses variables, quant au terme *alterné*, il signifie que f change de signe quand on échange la place de deux des $\vec{x}_k$ en laissant fixes les autres.

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$. Il est facile de voir que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel. On peut en effet vérifier que la somme de deux formes f et g qui sont n -linéaires est bien une forme n -linéaire et qu'elle est alternée dès que f et g le sont. De même, le produit d'une forme n -linéaire alternée par un scalaire est une forme n -linéaire alternée. L'ensemble $\mathcal{F}$ n'est pas vide car il contient la forme identiquement nulle. En fait, $\mathcal{F}$ est de dimension 1, donc toutes les formes n -linéaires alternées non triviales sont colinéaires. Avant de justifier cette affirmation, donnons quelques propriétés qui découlent immédiatement de la définition.

Proposition (*propriétés des formes n-linéaires alternées*)

Soit φ une forme n -linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$. Alors

1. φ est nulle sur toute famille de n vecteurs dont deux sont égaux.
2. φ est nulle sur toute famille de n vecteurs liés.
3. On ne change pas la valeur de φ en ajoutant à l'un des vecteurs $\vec{x}_i$ une combinaison linéaire des autres.

Pour commencer, étudions les formes 2-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^2$. Considérons deux vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ et la base canonique $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ se décomposent sous la forme

$$\vec{x}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 \quad \text{et} \quad \vec{x}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2$$

et on peut les voir comme des vecteurs colonnes

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

qui sont en fait les colonnes de la matrice A définie par les a_{ij} . S'il existe une forme 2-linéaire alternée φ sur $\mathbb{R}^2$, en utilisant la linéarité de φ par rapport à chacune des deux variables on doit avoir

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= a_{11}a_{12}\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + a_{11}a_{22}\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ &\quad + a_{21}a_{12}\varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a_{21}a_{22}\varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_2). \end{aligned}$$

Comme φ est alternée, on a $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 0$ et $\varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = -\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'où

$$\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = [a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}]\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

ce qui montre que φ est entièrement déterminée par la valeur de $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On définit le déterminant des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ comme l'unique forme φ telle que $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$. On obtient alors

$$\det(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Le déterminant $\det(A)$ d'une matrice carrée A d'ordre 2 est par définition le déterminant de ses deux vecteurs colonnes. Si $A = [a_{ij}]$, la valeur de $\det(A)$ est donnée par l'expression ci-dessus.

Passons au cas de la dimension 3 et considérons des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ et la base canonique $\beta = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, ces vecteurs se décomposent sous la forme

$$\vec{x}_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij}\vec{e}_i.$$

S'il existe une forme 3-linéaire alternée φ sur $\mathbb{R}^3$, en utilisant la linéarité de φ par rapport aux diverses variables on aura

$$\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \sum_{i_3=1}^3 a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \varphi(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \vec{e}_{i_3}).$$

La quantité $\varphi(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \vec{e}_{i_3})$ étant nulle dès que deux des variables sont égales, les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels les indices i_1 , i_2 et i_3 sont distincts deux à deux et il y en a exactement $3! = 6$ donnés par le tableau suivant

i_1	1	1	2	2	3	3
i_2	2	3	1	3	1	2
i_3	3	2	3	1	2	1

Comme φ est alternée, la quantité $\varphi(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \vec{e}_{i_3})$ est, au signe près, égale à $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le signe étant fonction du nombre de fois qu'il faut échanger de place deux des $\vec{e}_i$ pour rétablir l'ordre naturel des entiers. On a par exemple

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1) &= -\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) && \text{échange } \vec{e}_1 \leftrightarrow \vec{e}_2 \\ &= +\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) && \text{échange } \vec{e}_2 \leftrightarrow \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Après calcul, on obtient

$$\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}] \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3),$$

ce qui montre que φ est entièrement déterminée par la valeur de $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On définit le déterminant des vecteurs $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$ comme étant l'unique forme 3-linéaire alternée φ telle que $\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$. Il en résulte que

$$\det(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Le déterminant $\det(A)$ d'une matrice carrée A d'ordre 3 est par définition le déterminant de ses 3 vecteurs colonnes. Si $A = [a_{ij}]$, la valeur de $\det(A)$ est donnée par l'expression ci-dessus.

D'un point de vue pratique, un moyen commode d'organiser les calculs du déterminant d'une **matrice d'ordre 3**, connu sous le nom de règle de **Sarrus**, consiste à recopier en dessous de la matrice les deux premières lignes et à effectuer le produit des termes en diagonale. Puis on retranche la somme des diagonales *montantes* aux diagonales *descendantes*.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \swarrow & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & \searrow \\ \swarrow & & \searrow \end{array}$$

Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ on obtient

$$\begin{array}{ccc} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \swarrow & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} & \searrow \\ \swarrow & & \searrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 16 \\ -4 \\ \hline = 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} -6 \\ 16 \\ 12 \\ \hline = 22 \end{array}$$

$$\det A = 22 - 30$$

donc $\det A = -8$. Malheureusement cette règle ne se généralise pas pour une matrice d'ordre supérieur à 3.

Donnons maintenant la définition du déterminant d'une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition (déterminant)

On appelle déterminant d'une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ l'unique forme n -linéaire alternée qui prend la valeur 1 sur le n -uplet $(e_1, \dots, e_n)$. Si A est une matrice carrée d'ordre n , on appelle déterminant de A , et on note $\det A$ ou encore $|A|$, le déterminant des colonnes de A .

Les propositions suivantes rassemblent les propriétés usuelles du déterminant énoncées, par commodité, uniquement en termes de déterminant de matrice.

Proposition (propriétés du déterminant vis-à-vis des colonnes)

1. Le déterminant d'une matrice change de signe si on permute 2 colonnes.
2. Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales est nul.
3. Le déterminant d'une matrice dont les colonnes sont liées est nul.
4. Le déterminant d'une matrice n'est pas modifié si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Proposition (déterminant de la transposée)

Pour toute matrice carrée A , on a $\det(A^T) = \det(A)$.

Proposition (propriétés du déterminant vis-à-vis des lignes)

1. Le déterminant d'une matrice change de signe si on permute 2 lignes.
2. Le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul.
3. Le déterminant d'une matrice dont les lignes sont liées est nul.
4. Le déterminant d'une matrice n'est pas modifié si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

Proposition (déterminant d'un produit)

Pour toutes matrices carrées A et B , on a $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Proposition (déterminant et inversibilité)

Soit A une matrice carrée. Alors A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. On a alors $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

3.2 Développement suivant une colonne ou une ligne

Cette section a pour but d'établir une méthode effective de calcul du déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n . En utilisant la linéarité du déterminant de la matrice A par rapport à sa j -ème colonne, on voit facilement que

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \det(A'_{ij}),$$

où A'_{ij} désigne la matrice carrée de taille n déduite de A en remplaçant la j -ème colonne par une colonne constituée uniquement de zéros, sauf un 1 sur la i -ème ligne.

Introduisons alors la définition suivante.

Définition (cofacteur et comatrice)

Etant donnée une matrice carrée A d'ordre n , on appelle cofacteur d'indice i, j le coefficient défini par

$$c_{ij} = \det(A'_{ij}),$$

où A'_{ij} est la matrice définie ci-dessus. La matrice des cofacteurs de A s'appelle la comatrice de A , on la note $\text{com}A = [c_{ij}]$.

Le développement du déterminant de A par rapport à la j -ème colonne s'écrit donc

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_{ij}.$$

La proposition suivante montre que le calcul d'un cofacteur se ramène au calcul d'un déterminant d'ordre $n-1$.

Proposition

Soit A une matrice carrée d'ordre n et A_{ij} la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j . Alors

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Si l'on échange le rôle des colonnes et des lignes de A , ce qu'on est en droit de faire compte tenu de l'égalité $\det A = \det A^T$, on voit que l'on peut aussi développer un déterminant suivant une ligne. La proposition suivante récapitule les différents points qui viennent d'être mis en évidence.

Proposition (développement suivant une colonne ou suivant une ligne)

Soit A une matrice carrée d'ordre n . Alors

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^n a_{ij} c_{ij}, & \text{développement/colonne } j \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij}, & \text{développement/ligne } i \end{aligned}$$

où le cofacteur c_{ij} se calcule par la formule $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

Il est judicieux de développer un déterminant suivant une colonne (ou une ligne) contenant des zéros. On a donc intérêt à modifier la matrice en ajoutant à une colonne (une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (lignes) de façon à faire apparaître un maximum de zéros dans cette colonne (ligne) puisque cela ne change pas la valeur du déterminant (voir les propriétés données au paragraphe précédent).

Comme le calcul d'un déterminant d'ordre n suivant une colonne (une ligne) se ramène au calcul de n déterminants d'ordre $n-1$, on peut, pour calculer ces derniers, procéder de la même façon, et développer en colonne (ou en ligne). Cela fournit une règle *réursive* de calcul des déterminants qui est malheureusement très coûteuse en nombre d'opérations si les coefficients des sous matrices rencontrées sont toujours non nuls car cela nécessite un nombre d'opérations de l'ordre de $(n!)$.

Une illustration du procédé récursif est donnée par l'exemple suivant.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - L_2 \end{matrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -16. \end{aligned}$$

Pour une matrice triangulaire, le calcul du déterminant est très simple à effectuer.

Proposition (déterminant d'une matrice triangulaire)

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

En d'autres termes, si la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

3.3 Application à l'inversion de matrices

Pour calculer l'inverse A^{-1} d'une matrice inversible A par la méthode des déterminants, on calcule d'abord la comatrice $\text{com}A = [c_{ij}]$, avec $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$. La matrice A^{-1} est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\text{com}A]^T.$$

Exemple Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det A = -8$ et donc A est inversible. La comatrice vaut

$$\text{com}A = \begin{pmatrix} -11 & 16 & -2 \\ 5 & -8 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -11 & 5 & -1 \\ 16 & -8 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette méthode des déterminants est rapide pour les matrices 2×2 et 3×3 , mais devient vite impraticable pour les matrices de plus grande taille, sauf dans des cas bien spécifiques.

4 Valeurs et vecteurs propres

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

Définition (*vecteur propre*)

On dit que $x \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre de A s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Ax = \lambda x$.

On peut remarquer que le vecteur nul est toujours vecteur propre de A .

Définition (*valeur propre*)

On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$.

Si λ est valeur propre de A et si x est un vecteur propre associé à λ , tout vecteur colinéaire à x est aussi vecteur propre associé à λ . En fait, l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (de dimension supérieure ou égale à 1). Cela conduit à la définition suivante.

Définition (*sous-espace propre*)

L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ est le sous-espace vectoriel $V(\lambda)$ défini par

$$V(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\}.$$

On l'appelle sous-espace propre associé à λ .

On peut remarquer que

$$V(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax - \lambda x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)x = 0\},$$

donc

$$V(\lambda) = \ker(A - \lambda I).$$

Si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dire qu'un scalaire λ est valeur propre de A revient donc à dire que la matrice

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, ce qui est encore équivalent à dire que son déterminant est nul. Ce déterminant est un polynôme de λ car ses termes sont des produits d'éléments de la matrice $A - \lambda I$. Cela justifie la définition suivante.

Définition (*polynôme caractéristique*)

Le polynôme p_A défini par

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

s'appelle le polynôme caractéristique de A .

Il est facile de voir que le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est $(-1)^n$.

Au vu de ce qui précède, on a le résultat suivant.

Proposition

Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique p_A .

On rappelle que si p est un polynôme de degré n , une racine de p est un nombre réel r tel que $p(r) = 0$ ou de façon équivalente tel que p soit divisible par $(x - r)$, c'est-à-dire, $p(x) = (x - r)q(x)$, où q est un polynôme de degré $n - 1$. On définit aussi la multiplicité de r comme étant le plus grand entier k tel que p soit divisible par

$(x - r)^k$. Si $k = 1$ (resp. $k > 1$), on dit que r est racine simple (resp. racine multiple). Si $k = 2$, on dit que r est racine double.

Définition (*multiplicité d'une valeur propre*)

Si λ est une valeur propre de A , on appelle multiplicité de λ sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique p_A .

Proposition (*propriétés des valeurs et vecteurs propres*)

Soit A une matrice carrée d'ordre n et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de A distinctes deux à deux. Alors:

1. Si $V(\lambda_1)$ et $V(\lambda_2)$ sont deux sous-espaces propres associés à λ_1 et λ_2 , on a $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0\}$.
2. Toute famille $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de vecteurs propres non nuls, associés à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ est libre.
3. La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre est toujours inférieure ou égale à la multiplicité de celle-ci.

Il arrive que la dimension d'un sous-espace propre soit strictement inférieure à la multiplicité de la valeur propre associée. Si on prend la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on voit que $\lambda = 1$ est une valeur propre de multiplicité 2. Le sous-espace propre associé, donné par

$$V(1) = \ker(A - I) = \{(x_1, x_2); x_2 = 0\},$$

est de dimension 1.

Donnons à présent quelques propriétés qu'il est utile de connaître et dont la démonstration est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Proposition

Etant données deux matrices A et B d'ordre n , on a les propriétés suivantes.

1. Si A est triangulaire, ses valeurs propres sont les termes diagonaux.
2. Si λ est valeur propre de A , alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta\lambda$ est valeur propre de la matrice θA .
3. Si λ est valeur propre de A , alors λ^k est valeur propre de la matrice A^k .
4. Si λ est valeur propre de A , elle est aussi valeur propre de A^T .
5. A est inversible si et seulement si $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A .
6. Si A est inversible et si λ est valeur propre de A , alors $1/\lambda$ est valeur propre de A^{-1} .

Examinons enfin le cas des matrices symétriques réelles.

Proposition (*sur les valeurs et vecteurs propres des matrices symétriques*)

Si A est une matrice symétrique réelle d'ordre n , alors

1. Le polynôme caractéristique de A admet toujours n racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, autrement dit, il existe n valeurs propres (distinctes ou non).
2. Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
3. La dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre est égale à la multiplicité de celle-ci.
4. La trace de la matrice est égale à la somme des valeurs propres, autrement dit, on a $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.
5. Le déterminant de la matrice est égal au produit des valeurs propres, i.e. $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.
6. A est semi-définie positive si et seulement si ses n valeurs propres sont positives ou nulles.
7. A est définie positive si et seulement si ses n valeurs propres sont strictement positives.

5 Matrices à coefficients positifs

5.1 Matrices positives

Les modèles linéaires qui jouent un rôle central en économie font souvent intervenir des matrices à coefficients positifs ou nuls. Il est donc important de connaître les principales propriétés de ces matrices.

Définition (d'un vecteur positif)

On dit d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ qu'il est positif et on note $x \geq 0$ (resp. qu'il est strictement positif et on note $x > 0$) s'il est à coefficients positifs ou nuls (resp. à coefficients strictement positifs).

L'orthant positif de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x \geq 0\} = (\mathbb{R}_+)^n,$$

tandis que l'orthant strictement positif de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x > 0\} = (\mathbb{R}_+^*)^n.$$

Définition (d'une matrice positive)

On dit d'une matrice carrée A qu'elle est positive et on note $A \geq 0$ (resp. qu'elle est strictement positive et on note $A > 0$) si elle est à coefficients positifs ou nuls (resp. à coefficients strictement positifs).

Remarque. Attention de ne pas confondre matrice positive avec matrice semi-définie positive ou définie positive.

Proposition (sur une caractérisation des matrices positives)

Une matrice A est positive si et seulement si $Ax \geq 0$ est positif pour tout vecteur $x \geq 0$. Elle est strictement positive si et seulement si $Ax > 0$ pour tout $x \geq 0, x \neq 0$.

Proposition (sur les propriétés des matrices positives)

La somme de deux matrices positives est une matrice positive.
Le produit de deux matrices positives est une matrice positive.

5.2 Matrices productives

Définition (d'une matrice productive)

On dit d'une matrice carrée A qu'elle est productive si $A \geq 0$ et s'il existe au moins un vecteur $q \geq 0$ tel que $q > Aq$.

Dans un système de production linéaire de n biens, les coefficients techniques sont rassemblés dans une matrice A . Si le coefficient a_{ij} représente la quantité du bien i utilisée pour la production d'une unité du bien j , alors la somme

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j$$

représente la quantité du bien i nécessaire à la production des n biens dans les quantités $q_1, q_2, \dots, q_n$. Par suite la différence

$$q_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j$$

représente la production nette du bien i , c'est-à-dire la production brute de ce bien déflatée des consommations intermédiaires.

Dire que la matrice A est productive revient donc à dire qu'il existe au moins une façon de produire de telle sorte que toutes les productions nettes soient strictement positives. Cela se traduit par la relation vectorielle

$$q - Aq > 0.$$

Remarque. (sur la définition d'une matrice productive)

Si A est une matrice productive, tout vecteur $q \geq 0$ tel que $q > Aq$ est à coefficients strictement positifs. En effet, compte tenu du fait que $A \geq 0$ et $q \geq 0$, on a $Aq \geq 0$, d'où

$$q > Aq \geq 0.$$

Dans un système de production linéaire de n biens, cela signifie que pour dégager des productions nettes strictement positives de tous les biens, il est nécessaire de produire tous les biens en quantité strictement positive, ce qui tombe sous le sens.

Par contre, toute production brute $q > 0$ n'est pas forcément réalisable, en ce sens qu'elle ne conduit pas forcément à une production nette positive ou nulle. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{18} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

i.e.

$$q_1 > Aq_1 \quad \text{mais} \quad q_2 \not> Aq_2.$$

La matrice A est bien productive puisque la production brute d'une unité de chaque produit conduit à une production nette strictement positive de chacun des produits. Par contre, la production d'une unité du bien 1 et d'un tiers d'unité du bien 2 n'est pas réalisable.

Introduisons à présent l'ensemble

$$K := \{q \geq 0; q > Aq\}.$$

Par définition, la matrice $A \geq 0$ est productive si et seulement si l'ensemble K est non vide.

Proposition

Si $A \geq 0$ est productive, l'ensemble K est un cône convexe.

D'après la remarque qui suit la définition d'une matrice productive, le cône K est contenu dans l'orthant strictement positif :

$$K \subset \{q \in \mathbb{R}^n; q > 0\} = (\mathbb{R}_+^*)^n.$$

Dans l'exemple précédent, $q_1 = (1, 1) \in K$, tandis que $q_2 = (1, \frac{1}{3}) \notin K$. On pourra faire une représentation géométrique du cône K dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition (sur une condition suffisante pour qu'une matrice soit productive)

Soit A une matrice carrée telle que $A \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n a_{ij} < 1$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. Alors A est productive.

Théorème (de caractérisation des matrices productives)

Pour qu'une matrice carrée $A \geq 0$ soit productive, il faut et il suffit que $I - A$ soit inversible et que $(I - A)^{-1} \geq 0$.

Proposition (sur les propriétés des matrices productives)

Soit A une matrice productive. Alors toute valeur propre (réelle) λ de A (s'il en existe) est telle que $|\lambda| < 1$.

Proposition (sur la transposée d'une matrice productive)

La transposée d'une matrice productive est une matrice productive.

Dire que la transposée d'une matrice productive est productive s'interprète de façon économique. Toujours dans le cadre d'un système de production linéaire de n biens, et en interprétant le coefficient technique a_{ij} comme la quantité du bien i utilisée pour la production d'une unité du bien j , si on affecte des valeurs monétaires (des prix) p_j aux biens, alors la somme

$$\sum_{j=1}^n a_{ji} p_j$$

représente la somme des valeurs des biens nécessaires à la production d'une unité du bien i . Par suite la quantité

$$p_i - \sum_{j=1}^n a_{ji} p_j = p_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}^T p_j$$

représente la valeur nette du bien i , c'est-à-dire la valeur brute d'une unité de ce bien déflatée du coût total de production. Matriciellement cela s'écrit

$$p - A^T p > 0.$$

Donc dire que A^T est productive revient à dire qu'il existe au moins une façon d'affecter aux biens des valeurs monétaires de telle sorte que les valeurs nettes des biens soient strictement positives.

5.3 Matrices stochastiques

Introduisons pour terminer une classe particulière de matrices positives. Il arrive assez souvent qu'une variable, ou plus généralement un système, ne pouvant prendre qu'un nombre fini n d'états, voit cet état se modifier à intervalles réguliers de temps, toutes les minutes, tous les mois, tous les ans, etc. Si à un instant donné, la variable (le système) ne peut se trouver que dans un seul état, et si on connaît la probabilité p_{ij} que la variable (le système) soit dans l'état j à l'instant k alors qu'elle (qu'il) était dans l'état i à l'instant précédent $k-1$, on dit que l'on est en présence d'une chaîne de Markov. Pour la définition formelle d'une chaîne de Markov, on invite le lecteur à consulter un ouvrage spécialisé.

On dispose alors d'une matrice $P = (p_{ij})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls et qui possède une propriété supplémentaire qui résulte du fait que si la variable (le système) se trouve dans un état i à un instant donné, la somme des probabilités qu'elle (qu'il) soit dans l'un des n états à l'instant suivant doit valoir 1. On est ainsi amené à introduire la définition suivante.

Définition (d'une matrice stochastique)

On dit qu'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est stochastique si $A \geq 0$ et si la somme des termes sur chaque ligne vaut 1, autrement dit

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n.$$

De façon immédiate, on a le résultat suivant :

Proposition

Une matrice carrée A est stochastique si et seulement si $A \geq 0$ et $As = s$ où $s := (1, 1, \dots, 1)$.

On déduit alors :

Proposition (sur une caractérisation des matrices stochastiques)

Soit A une matrice carrée positive. Alors A est stochastique si et seulement si $\lambda = 1$ est valeur propre et si le sous-espace propre associé contient le vecteur $s = (1, 1, \dots, 1)$.

Proposition (sur une propriété des matrices stochastiques)

Soit A une matrice stochastique. Alors pour toute valeur propre (réelle) λ de A on a $|\lambda| \leq 1$. De plus, si A est à diagonale strictement positive, ces valeurs propres (réelles) sont nécessairement dans l'intervalle $] -1, +1]$.