

$$\begin{aligned} 1) P_B &= \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 6\lambda = \lambda(-\lambda^2 - 6) \\ & \quad 4\lambda \quad \quad \quad \lambda \quad -\lambda \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ & \quad \quad \quad \frac{\lambda}{6\lambda} \quad -1 \quad -\lambda \quad 1 \quad \frac{-2}{-\lambda^3} \end{aligned}$$

2) λ est une valeur propre de B si λ est une racine de P_B .

3) Soit $\lambda = 0$ ou soit $\lambda^2 = -6$ sauf qu'un carré n'est jamais négatif. Donc 0 est la seule valeur propre de B .

CT 23/24 :

Exercice 1:

1) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \right\}$

- $\vec{0} \notin F \Rightarrow 2 \times 0 - 5 \times 0 + 0 = 0 \neq 1$ donc F n'est pas un sous-espace vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

2) $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \right\}$

- $\vec{0} \in F$ car $2 \times 0 - 5 \times 0 + 0 = 0$ vecteur nul $\in G$.

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in G$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in G$.

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= 2(x_1 + y_1) - 5(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ &= 2x_1 + 2y_1 - 5x_2 - 5y_2 + x_3 + y_3 \\ &= \underbrace{2x_1 - 5x_2 + x_3}_0 + \underbrace{2y_1 - 5y_2 + y_3}_0 \\ &= 0 \quad \vec{u} \in G \quad \vec{v} \in G \\ &= 0 \quad \text{stable par addition.} \end{aligned}$$

- pour un λ : $\vec{u}\lambda = 2\lambda x_1 - 5\lambda x_2 + \lambda x_3$
 $= \lambda (2x_1 - 5x_2 + x_3)$
 $= \lambda \times 0 \quad \vec{u} \in G$
 $= 0$ stable par multiplication.

3) $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_3 = x_1 x_2 \right\}$.

On pose deux vecteurs ~~quel~~ : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in H$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in H$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 3 + 5 = 8 \neq 4 \quad \text{non stable par addition.}$$

H n'est pas un sous-espace vectorielle de $\mathbb{R}^3$

Exercice 2:

1)
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - C_1 \quad C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - 4C_2 \quad C_4 - 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_4' - C_3'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $\text{rang } S = 3$

3) $\text{rg } S \neq \text{Card } S$ donc S ne forme pas une famille libre de $\mathbb{R}^3$

4) $u_3 = av_1 + bv_2 + cv_3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+2c=3 \\ b+3c=5 \\ 2a+2b+5c=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b+2c=4 \\ b+3c=5 \\ 2a+2b+5c=7 \end{cases} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{cases} a+b=1 \\ b+2c=4 \\ c=1 \quad L_3-L_2 \\ 2a+2b+5c=7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases} \quad u_3 = -v_1 + 2v_2 + v_3$$

Exercice 3:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$1) \quad A+4I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg } A+4I = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

2) $n = \text{rg } A + \dim \text{Ker } A$

3) $3 = 1 + \dim \text{Ker}(A+4I)$ $\det(A+4I) = 0$ donc -4 est une valeur propre de A
 $\dim \text{Ker}(A+4I) = 3 - 1 = 2$

$$4) \text{Tr} A = -3 + 0 + 5 = 2.$$

$$2 = -4 + -4 + \lambda$$

$$2 = -8 + \lambda \Rightarrow \lambda = 10. \quad 10 \text{ est la deuxième valeur propre de } A.$$

$$5) V(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda I) \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = \lambda x \right\}$$

$$6) V(-4) = \dim \ker(A + 4I) \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0 \end{array} \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -2x_2 - 3x_3 \right\}.$$

$$7) \text{Vect } V(-4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$8) V(10) = \dim \ker(A - 10I) \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -13x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 - 10x_3 + 6x_1 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -13x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -63x_1 + 2x_3 = 0 \\ 42x_1 - 14x_3 = 0 \end{array} \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -13x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 63x_1 = 21x_3 \\ 42x_1 = 14x_3 \end{array} \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -13x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_3 = 3x_1 \end{array} \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -13x_1 + 2x_2 + 9x_1 = 0 \\ x_3 = 3x_1 \end{array} \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 3x_1 \end{array} \right\} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 3x_1 \end{array} \right\} \\ = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 4:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$