TD 1

Ex 1.1

(i) : $(x^3)^5 = x^{15}$

(ii) : $(x+y)(3x^2 - xy + 4)$

$= x(3x^2 - xy + 4) + y(3x^2 - xy + 4)$

$= 3x^3 - x^2y + 4x + 3x^2y - xy^2 + 4y$

$= 3x^3 + 2x^2y - xy^2 + 4x + 4y$

(iii) : $(x^2 - 2x + y)(x + 4y)$

$= x(x^2 - 2x + y) + 4y(x^2 - 2x + y)$

$= x^3 - 2x^2 + xy + 4yx^2 - 8xy + 4y^2$

$= x^3 + 4x^2y + 4y^2 - 7xy - 2x^2$

(iv) : $(-xy+3)(x+2)$

$= x(-xy+3) + 2(-xy+3)$

$= -x^2y + 3x + -2xy + 6$

(v) : $(x^2+4xy-y)(x-y)$

$= x(x^2+4xy-y) - y(x^2+4xy-y)$

$= x^3 + 4x^2y - yx - yx^2 - 4xy^2 - y^2$

$= x^3 + 3x^2y - yx - 4xy^2 - y^2$

(vi) : $(x-3y+5)(3x+9y-2)$

$= 3x(x-3y+5) + 9y(x-3y+5)$
$-2(x-3y+5)$

$= 3x^2 - 9y + 15x + 9yx - 27y^2$
$+ 45y - 2x + 6y - 10$

$= 3x^2 - 27y^2 + 13x + 51y - 10.$

(vii) $(6+x^2)^2$ MÉTHODE 1

$= (6+x^2)(6+x^2) = 36 + 6x^2$
$+ 6x^2 + x^4$
$= x^4 + 12x^2 + 36.$

(viii) $(4x+y)^2$ MÉTHODE 2

↳ identité remarquable

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(4x+y)^2 = 16x^2 + 2\times(4x\times y) + y^2$
$= 16x^2 + 8xy + y^2$

(ix) : $(2+x)(3+y)(x-y)$

$= \left(2(3+y) + x(3+y)\right) \times (x-y)$

$= (6 + 2y + 3x + xy)(x-y)$

$= 6x + 2yx + 3x^2 + x^2y - 6y - 2y^2$
$- 3xy - xy^2$

$$= 6x - xy + 3x^2 + x^2y - 6y - 2y^2 - xy^2$$

(x) $(x-2)(y+x^2)(1+xy)$

$$= \left[x(y+x^2) - 2(y+x^2)\right](1+xy)$$

$$= \left[xy + x^3 - 2y - 2x^2\right](1+xy)$$

$$= xy + x^3 - 2y - 2x^2 + x^2y^2 + x^4y - 2xy^2 - 2x^3y$$

(xi) : $(x-1)(1+x+x^2+x^3)$

$$= \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + x^4 - 1 - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3}$$

$$= x^4 - 1$$

RAPPEL

Polynôme du 2nd degré :

$$\boxed{ax^2 + bx + c}$$

Solution : $\Delta = b^2 - 4ac$

Si • $\Delta > 0$ alors deux solutions:

$x_1 : \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 : \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Forme factoriser : $a(x - x_1)(x - x_2)$

Si • $\Delta = 0$ alors une solution

$x_1 = \dfrac{-b}{2a}$

Forme factoriser: $a(x - \Delta)^2$

Identités Remarquables

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$\underline{\text{Ex } 1.2}$

$ax^2 + bx + c$

$\Delta = b^2 - 4ac$

(i) : $4x^2 + 4x + 1$

$a = 4 \qquad b = 4 \qquad c = 1$

$\Delta = 4^2 - 4 \times 4 \times 1$
$= 16 - 16 = 0$ Donc 1 solution

$x_1 = \frac{-4}{2 \times 4} = \frac{-4}{8} = \boxed{\frac{-1}{2}}$

Factorisation :

$4\left(x + 1/2\right)^2$

(ii) : $x^2 - 5x + 6$

$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$

$= 25 - 24 = 1$

Ici $\Delta > 0$ Donc 2 solutions

$$x_1 = \frac{+5 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$$x_2 = \frac{+5 + \sqrt{1}}{2} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$$

factorisation $= (x-3)(x-2)$

(iii) $= 2x^2 - 3x - 8$

$a = 2 \quad b = -3 \quad c = -8$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-8)$
$= 9 + 64 = 73.$ $\Delta > 0$

$x_1 = \frac{+3 - \sqrt{73}}{2 \times 2} = \frac{3 - \sqrt{73}}{4}$

$x_2 = \frac{3 + \sqrt{73}}{2 \times 2} = \frac{3 + \sqrt{73}}{4}$

Fatorisation :

$2\left(x - \frac{3 + \sqrt{73}}{4}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{73}}{4}\right)$

(iv) : $x^2 + 4xy + 4y^2$

$a = 1 \quad b = 4y \quad c = 4y^2$

$D = 4y^2 - 4 \times 1 \times 4y^2$

$= 4y^2 - 16y^2 = -12y^2$

$\Delta < 0$ donc pas de solution

(v) $= x^2 - 3xy + 2y^2$

$a = 1 \quad b = -3y \quad c = 2y^2$

$\Delta = (-3y)^2 - 4 \times 1 \times 2y^2$

$= 9y^2 - 8y^2 = y^2$

dépend de y et pas de x

Factorisation : $(x-y)(x-2y)$

(vi) $= x^3 - 1$ Polynôme du 3ème degré

Racine évidente : $x = 1$

Si $x = 1 \rightarrow 1^3 - 1 = 0$

Factorisation : $(x-1)(x^2+x+1)$

Ex 1.3

(i) $= \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{4}{x+1}$

$$= \frac{(x-1)4}{(x-1)(x+1)} + \frac{(x+1)x}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{4x - 4 + x^2 + x}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{5x - 4 + x^2}{x^2 - 1} \quad \text{or} \quad \frac{5x - 4 + x^2}{(x-1)(x+1)}$$

(ii) $$\frac{x+2}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{x^2-1}{(x+1)(x^2-1)}+\frac{(x+2)(x+1)}{(x^2-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x^2-1}{(x+1)(x^2-1)}+\frac{x^2+3x+2}{(x^2-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+3x+1}{(x^2-1)(x+1)}$$

à simplifier ou non

ou $$\frac{2x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1}$$

$$(iii) = \frac{2x+4}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x^2-5x+6}{(x+1)(x^2-5x+6)} + \frac{(2x+4)(x+1)}{(x^2-5x+6)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2-5x+6}{(x+1)(x^2-5x+6)} + \frac{2x^2+6x+4}{(x^2-5x+6)(x+1)}$$

$$= \frac{3x^2+x+10}{(x+1)(x^2-5x+6)}$$ → à simplifier ou non

ou $$\frac{3x^2+x+10}{x^3-4x^2+x+6}$$

$$(iv) = \frac{1-y^2}{xy} - \frac{x-y^2}{x^2y}$$

$$= \frac{(1-y^2)(x^2y)}{(xy)(x^2y)} - \frac{(x-y^2)(xy)}{(x^2y)(xy)}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + y - y^2x^2 - \cancel{y^3}}{(xy)(x^2y)} - \frac{\cancel{x^2} + xy - y^2x - \cancel{y^3}}{(xy)(x^2y)}$$

$$= \frac{-y^2x^2 - y^2x + xy + y}{(xy)(x^2y)}$$ → à simplifier ou non

Ex 1.4

Résolution dans $\mathbb{R}$

(i) : $4x + 3 > \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} &= 4x > \sqrt{2} - 3 \\ &= x > \frac{\sqrt{2} - 3}{4} \end{aligned}\right\} \boxed{S = \left]\frac{\sqrt{2}-3}{4} ; +\infty\right[}$$

(ii) : $x^2 - 4x + 4 > 0$

⚠ Polynôme du 2nd degré

$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 4$

$= \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4$

$= 16 - 16 = 0$ → 1 solution

$$x_1 = \frac{+4}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = \boxed{2.}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x^2 - 4x + 4$		+	0	+	

↳ signe de a positif à l'extérieur des racines

$$\boxed{S = \mathbb{R}}$$

(iii) : $-3x^2 + 2x + 1 \leq 0$

↳ Polynôme du 2^{nd} degré

$a = -3 \quad b = 2 \quad c = 1$

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-3) \times 1$

$= 4 + 12 = 16$ → $\Delta > 0$ donc 2 solutions

$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-2-4}{-6} = -1$

$x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-2+4}{-6} = -\dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-1/3$		-1		$+\infty$
$-3x^2+2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

↳ on n'intéresse à ce qui est ≤ 0

Donc : $\boxed{S = \left]-\infty ; -\tfrac{1}{3}\right] \cup \left[-1 ; +\infty\right[}$

(iv) : $\dfrac{x-3}{x+4} \geq 0$

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x \geq 3 \\ \text{et} \\ x+4 \geq 0 \\ x \geq -4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-3}{x+4}$		$+$		$-$		$+$	

$$\boxed{S =]-\infty ; -4] \cup [3 ; +\infty[}$$

(v) : $x^2 - x \geq 1$

$x^2 - x - 1 \geq 0$ → on pose Δ

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)$

$= 1 + 4 = 5$ → $\Delta > 0$ donc 2 solutions.

$$x_1 = \frac{+1 - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{+1 + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

↳ signe de a positif à l'extérieur des racines

$$S ; \left]-\infty ; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$$

(vi) : $3x^2 \leq 7$

$3x^2 - 7 \leq 0$ → on pose Δ

$a = 3 \quad b = 0 \quad c = -7$

↳ car pas de x

$\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times (-7)$

$= 112$ $\Delta > 0$ donc deux racines

$$x_1 = \frac{-0 - \sqrt{112}}{2 \times 3} = \frac{-\sqrt{112}}{6}$$

$$x_2 = \frac{-0 + \sqrt{112}}{2 \times 3} = \frac{+\sqrt{112}}{6}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{112}}{6}$		$\frac{\sqrt{112}}{6}$		$+\infty$
$3x^2-7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

↳ Signe de a positif à l'exterieur des racines.

$$S : \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{112}}{6}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{112}}{6} ; +\infty\right[$$