

TD n°6 – Fonctions sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 10.1 (fonctions linéaires et fonctions affines)

Déterminer quelles fonctions sont affines, et préciser si elles sont aussi linéaires. Si oui, écrire la fonction sous la forme $f(x) = (a, x) + c$, où $a \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Si non, justifier la réponse.

(i) $f(x) = 1 + x + x^2$;

(ii) $g(x) = 2 + 3x$;

(iii) $h(x) = \sqrt{x^3 - 1}$;

(iv) $u(x, y) = 2x - 3y$;

(v) $v(x, y) = -x + 10$;

(vi) $w(x, y, z) = x + y - 5z$.

affine quand $f' = \text{constante}$

linéaire quand $f(0) = 0$

Exercice 10.2 (fonctions convexes et fonctions concaves)

Déterminer si le domaine de définition des fonctions suivantes est convexe. Déterminer quelles fonctions sont convexes ou concaves sur leur domaine de définition. Justifier les réponses.

(i) $f(x) = |x| + 1$;

(ii) $g(x) = \ln x^2$;

(iii) $h(x) = 2 \ln x$;

(iv) $k(x) = \frac{x}{1 + x^2}$;

(v) $u(x, y) = |x + y|$;

(vi) $v(x, y) = x^2 + \sqrt{y}$;

(vii) $w(x, y) = x^4 + y^2 + x$.

Uconvexe : $f'' > 0$

Uconcave : $f'' < 0$

Exercice 10.3 (fonctions homogènes)

Déterminer si le domaine de définition des fonctions suivantes est un cône. Déterminer quelles fonctions sont homogènes, et préciser le degré d'homogénéité. Justifier les réponses.

(i) $f(x) = 2|x| - x$;

(ii) $g(x) = x^2 - x$;

(iii) $h(x, y) = \frac{x}{y^2 + xy}$;

(iv) $k(x, y) = \frac{x}{y^2 - x}$;

(v) $u(x, y) = e^{x/y} + 3$;

(vi) $v(x, y) = x^{1/2}y^{1/3} + xy^{-1/6}$.

$f(\lambda x) = \lambda^x f(x)$