UNIVERSITÉ de BOURGOGNE
UFR Droit et Sciences Économique et Politique

Licence Économie-Gestion
L1/S2, Année 2022-2023

Mathématiques

Examen première session (2h)

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 (4 pts)
On considère les deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{10^n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n)$.
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2 (3 pts)
On rappelle que

$$e^x = 1 + x + x\,\varepsilon_1(x) \quad \text{ et } \quad \ln(1+x) = x + x\,\varepsilon_2(x),$$

où ε_1, ε_2 sont deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$.

Déterminer le développement limité d'ordre 2 en $x = 0$ des fonctions suivantes :

$x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + e^{x^2}\right)$;

$x \mapsto g(x) = \ln(f(x))$.

En déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}$.

T.S.V.P.

Exercice 3 (4 pts)
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{2+x^4}\,dx$;

2. $\displaystyle\int x^4 \ln x\,dx$;

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx$.

   On commencera par déterminer les coefficients a, $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}, \qquad \text{pour tout } x \notin \{-2, 3\}.$$

Exercice 4 (9 pts)
On pose $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y>0\}$ et on considère la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y} + x + y.$$

1. Calculer les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. Calculer les quatre dérivées partielles secondes de f en (x,y).
3. Rappeler le résultat concernant la caractérisation de la convexité/concavité de f via la matrice hessienne.
4. La fonction f définie ci-dessus est-elle convexe/concave sur Ω ?
5. Montrer que l'ensemble des points critiques de f est égal à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=1\}$.
6. Quelle est la nature des points critiques de f ?
7. On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $\varphi(u) = \frac{1}{u} + u$ pour tout $u > 0$.
   (a) Calculer la dérivée φ' et étudier son signe.
   (b) En déduire que $u = 1$ est un minimum global de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Retrouver alors le résultat de la question 6.