

Fiche de travaux dirigés - L2 - TD1

U.F.R. Droit Science Economique et Politique

D. Legros

2024-2025

Exercice 1 Démontrer les propositions suivantes :

1. $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$.
2. $A \cup B = B \cup (A \cap \overline{B})$.
3. $(A \cup B) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$.
4. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Exercice 2 Soient A, B et C des événements. On pose $E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ et $E_2 = A \cap (B \cup C)$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.
2. Déterminer l'ensemble $E_1 \cup E_2$.

Exercice 3 Soit l'ensemble $A := \{0, 1\}$.

1. Énumérer l'ensemble des parties de A noté $\mathcal{P}(A)$.
2. Énumérer l'ensemble des parties de l'ensemble des parties de A noté $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

Exercice 4 Soient A, B et C trois événements quelconques.

1. Démontrer que l'on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
2. Démontrer que l'on a : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$.

Exercice 5 Une entreprise possède trois machines A, B, C . On note l'évènement A_n (respectivement B_n et C_n), l'évènement n salariés travaillent sur la machine A (respectivement B, C). Avec ces notations, écrire les évènements suivants :

1. Personne ne travaille sur la machine A .
2. Deux salariés travaillent sur la machine A et un salarié sur B .
3. Un salarié travaille sur A , un salarié sur B et personne sur C .
4. Moins de trois salariés travaillent sur A .
5. Plus de trois salariés travaillent sur A .
6. Deux salariés travaillent sur A et au moins un salarié travaillent sur B .

Exercice 6 Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3 indiscernables au toucher. On tire cinq boules dans cette urne, successivement, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre les suivantes.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?

On note E l'évènement : « les nombres 1, 2 ou 3 sortent au moins une fois lors de ces 5 tirages ». On veut calculer la probabilité $P(E)$. On appelle A_1 l'évènement : « la boule n° 1 ne sort pas lors des 10 tirages ». On notera A_2 et A_3 les évènements équivalents pour les boules n° 2 et n° 3.

2. Déterminer la probabilité de l'évènement A_1 . Que peut-t-on dire des probabilités des évènements A_2 et A_3 ?
3. Décrire l'évènement $A_1 \cap A_2$, puis déterminer sa probabilité.
4. Décrire l'évènement $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, puis déterminer sa probabilité.
5. En utilisant la formule du crible de Poincaré, calculer la probabilité $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.
6. En déduire $P(E)$.

Exercice 7 Soit l'ensemble $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Déterminer la tribu contenant les évènements $\{c\}$ et $\{d\}$.

Exercice 8 Soit $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. Déterminer la σ -algèbre engendrée par la partition $\Pi = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{e\}\}$ de Ω .

Exercice 9 Déterminer toutes les algèbres d'évènements définies sur les ensembles Ω suivants :

1. $\Omega = \{a\}$
2. $\Omega = \{a, b\}$
3. $\Omega = \{a, b, c\}$

Exercice 10 Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$. La famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω est-elle une algèbre d'évènements ?

Exercice 11 Soit A et B deux sous-ensembles quelconques de Ω . A l'aide des opérations d'union, d'intersection et de complémentation, construire à partir de A et B toutes les parties possibles de Ω et montrer qu'il s'agit d'une algèbre d'évènements.

Exercice 12 Soit $\Omega = \{A, B, C, D, E\}$ un ensemble fondamental. On considère les deux familles de parties de Ω :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{\emptyset, \{A\}, \{B, C, D, E\}, \Omega\} \\ F_2 &= \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}, \{C, D, E\}, \{A, C, D, E\}, \{B, C, D, E\}, \Omega\} \end{aligned}$$

1. Vérifier que F_1 et F_2 sont des tribus.
2. Construire la tribu F_3 engendrée par $\{\{A\}, \{C, D\}\}$

Exercice 13 Donner un exemple d'une famille de parties d'un ensemble qui ne soit pas une tribu.

Exercice 14 Quelle est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathcal{A} = \{[0, 2], [1, 3]\}$? Quel est son cardinal ?

Exercice 15 Démontrer la proposition suivante :

1. Soit $\mathcal{T}_i, i \in I$, une famille non vide de σ -algèbres de parties de Ω , alors $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est une σ -algèbre.

Exercice 16 Soit A une partie d'un ensemble E distincte de l'ensemble vide et de E lui même. Montrer que la tribu engendrée par A est l'union de $\{\emptyset, E\}$ et d'une partition.

Exercice 17 Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux tribus de E . Décrire simplement la tribu engendrée par $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$, puis la tribu engendrée par $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$.

Exercice 18 Soit l'univers fondamental $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Laquelle des fonctions $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ suivantes définit une probabilité sur Ω ?

1. $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{5}.$
2. $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{8}, \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{8}.$